MATEMATIKA 9

I DALIS



MATEMATIKA 9. I DALIS

LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli devintokai,
šį vadovėlį autorių kolektyvas rengė nuolat prisimindamas, kad po dviejų metų jūsų laukia nelengvas pasirinkimas ko ir kaip toliau mokytis. Pagrindinės mokyklos programoje numatytą medžiagą buvo stengtasi papildyti teiginiais, uždaviniais, o kai kada net atskirais skyreliais, kurie būtų naudingi moksleiviams, planuojantiems pasirinkti realinį profilį arba tiesiog norintiems žinoti daugiau.
Vadovėlis susideda iš dviejų dalių (I dalis — 1–5 skyriai, II dalis — 6–11 skyriai). Kad jūs galėtumėte dirbti savarankiškai, teorinė dalis yra platesnė, pateikta daugiau išspręstų pavyzdžių, bet mažiau pratimų ir užduočių. Kaip įprasta, sunkesnių užduočių numeriai pažymėti žvaigždute. Kam uždavinių bus per mažai, atskira knygute yra išleistas uždavinynas. Kiekvienoje vadovėlio dalyje pratimai ir užduotys numeruojami iš eilės, išskyrus skyrelius „Pasitikrinkite", kurių uždaviniai numeruojami atskirai kiekviename skyriuje, o jų atsakymai pateikti kiekvienos dalies gale. Teorijos skyreliuose nuspalvintas klaustukas žymi klausimus, į kuriuos turėtų atsakyti patys mokiniai. Pilkame fone pateikta neprivaloma teorinė medžiaga skirta temos pagilinimui. Uždaviniai atitinkantys papildomą medžiagą, yra nuspalvinti, o papildomi sunkesnieji uždaviniai dar pažymėti spalvota žvaigždute. Siekiant atkreipti jūsų dėmesį, kai kurie apibendrinantys teiginiai ir formulės spalvotai įrėminti.
Šį vadovėlį kūrė ne tik autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius.

Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

Irena Bagdonienė, Jolanta Knyvienė, Adelija Kuzmarskienė, Aleksandras Plikusas, Kazimieras Pulmonas, Juozas Šinkūnas.

Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė, V. Bartkuvienė, K. Intienė, V. Jankevičienė, R. Jonaitienė, A. Karmanova, S. Kavaliūnienė, R. Klasauskienė, N. Kriaučiūnienė, R. Kučiauskienė, D. Matienė, G. Mikalauskienė, L. Papuškienė, L. Prialgauskienė, V. Sičiūnienė, O. Simanavičienė, S. Staknienė, V. Stoškuvienė, A. Šverienė, A. Ūsienė, V. Viniautienė, A. Žiulpa.*

MATEMATIKA 9

I DALIS

TEV

VILNIUS 2000

UDK 51(075.3)
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti 2000 05 31, grifo Nr. 71

Darbo vadovas: *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak, Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Inga Paukštienė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė, Aldona Žalienė*

Gamybos vadovas: *Algimantas Paškevičius*

Kalbos redaktorė: *Diana Gustienė*

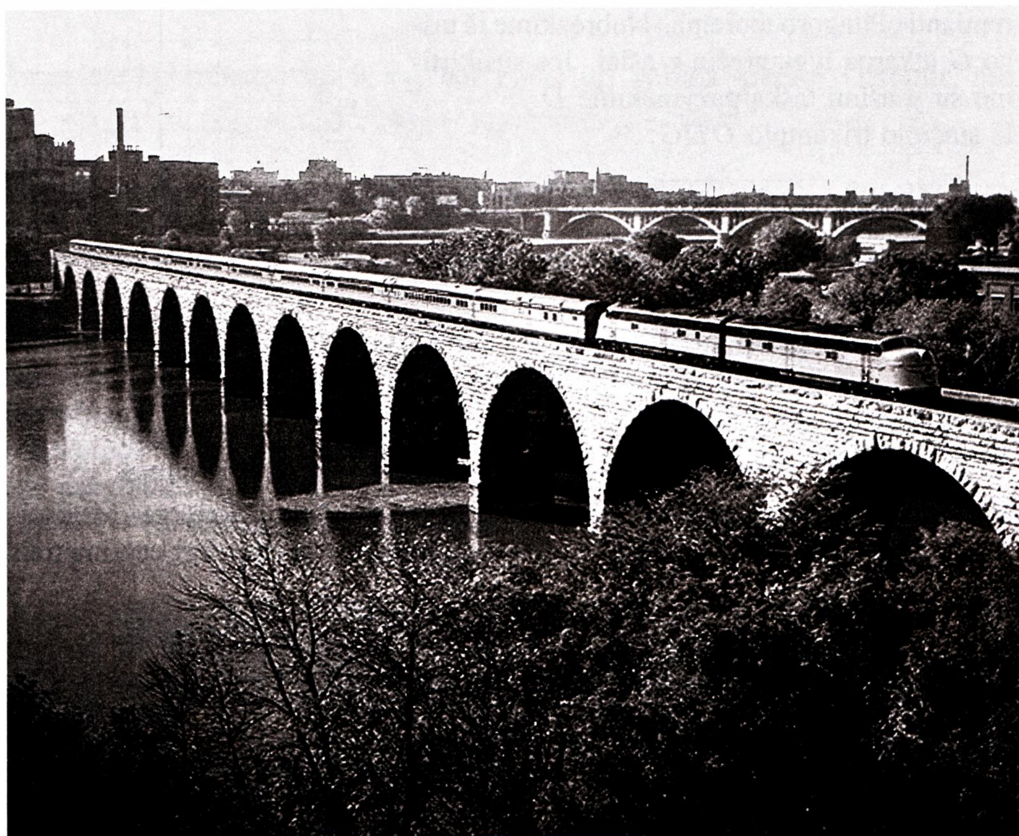
Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV *Internet'o* svetainė: www.tev.lt

ISBN 9986–546–83–4 (1 dalis)
ISBN 9986–546–84–2 (2 dalys)

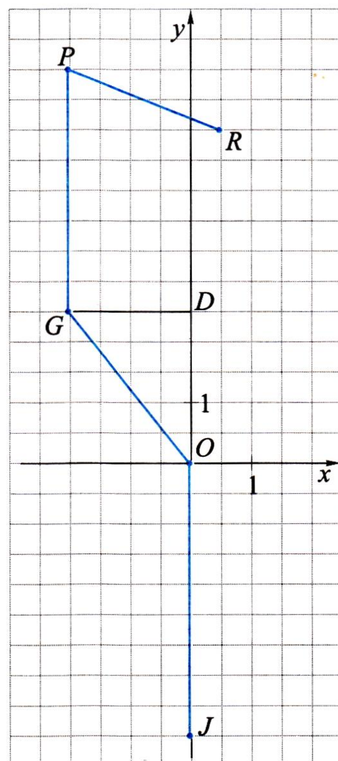
TURINYS

1 TIESINĖ FUNKCIJA



1 Atstumas tarp dviejų taškų. Atkarpos vidurio taško koordinatės

Schemoje pavaizduotas turistinis maršrutas Juodkrantė–Kretinga (1 cm schemoje atitinka 4 km vietovėje). Remdamiesi schema galime apskaičiuoti maršruto ilgį. Tam pirmiausia reikia rasti laužtės $JOGPR$ ilgį. Lengviausia rasti atkarpų JO ir GP ilgius. Matome, kad atkarpa $GP = 4$ cm. Kadangi taškai P ir G yra tiesėje lygiagrečioje y ašiai, tai tą patį rezultatą gautume apskaičiavę taškų P ir G ordinačių skirtumą $6{,}5 - 2{,}5$ arba skirtumo modulį $|2{,}5 - 6{,}5|$.



J — Juodkrantė
O — Klaipėda
G — Giruliai
P — Palanga
R — Kretinga

? Koks atkarpos JO ilgis?

Atkarpų OG ir PR ilgius apskaičiuoti galima remiantis Pitagoro teorema. Nubrėžkime iš taško G atkarpą lygiagrečią x ašiai. Jos susikirtimo su y ašimi tašką pažymėkime D.
Iš stačiojo trikampio ODG:

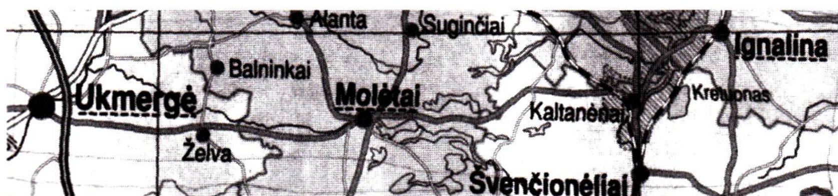
$$OG = \sqrt{OD^2 + DG^2}.$$

Kadangi $OD = 2{,}5$ cm, $DG = 2$ cm, tai

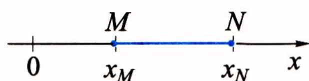
$$OG = \sqrt{2{,}5^2 + 2^2} \approx 3{,}2 \text{ (cm)}.$$

? Koks atkarpos PR ilgis?
Koks viso turistinio maršruto ilgis kilometrais?

Užduotis. Koordinačių plokštumoje nubraižykite maršruto Ukmergė–Molėtai–Švenčionėliai–Ignalina schemą ir raskite nubraižytos laužtės ilgį centimetrais.



Atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių koordinačių ašiai, lygus tų taškų koordinačių skirtumo moduliui.

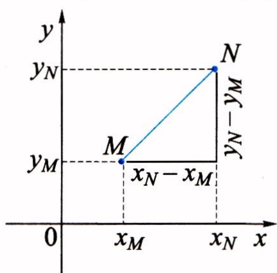


$$MN = |x_N - x_M|$$

x_N — taško N koordinatė,
x_M — taško M koordinatė.

Formulėje modulio ženklo galima ir nerašyti, kai yra žinoma, kad skirtumas $x_N - x_M$ teigiamas, t. y. kai $x_N > x_M$.

Atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių koordinačių plokštumai, lygus kvadratinei šakniai iš tų taškų atitinkamų koordinačių skirtumų kvadratų sumos.



$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

x_N ir y_N — taško N koordinatės,
x_M ir y_M — taško M koordinatės.

Formulėje koordinates x_N ir x_M bei y_N ir y_M galima sukeisti vietomis, nes $(x_N - x_M)^2 = (x_M - x_N)^2$, $(y_N - y_M)^2 = (y_M - y_N)^2$.

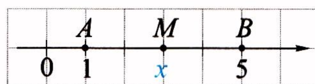
? Kam lygus atstumas tarp taškų $A(-3)$ ir $B(-1)$; $C(0; 2)$ ir $D(-5; -2)$?

Žinant atkarpos galų koordinates galima rasti atkarpos vidurio taško koordinates.

UŽDAVINYS. Raskime atkarpos AB vidurio taško M koordinates, kai žinomos atkarpos galų koordinatės: a) $A(1)$, $B(5)$; b) $A(2; 2)$, $B(8; 6)$.

Sprendimas.

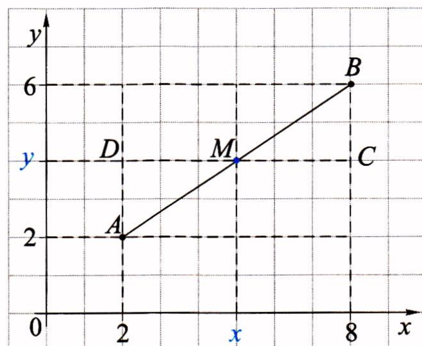
a) Atkarpos AB vidurio taško M koordinatę pažymėkime x. Tada $AM = x - 1$, $BM = 5 - x$. Kadangi $AM = MB$, tai



$$x - 1 = 5 - x.$$
$$2x = 5 + 1,$$
$$x = \frac{5+1}{2} \text{ (atkarpos } AB \text{ galų koordinačių aritmetinis vidurkis),}$$
$$x = 3.$$

Atsakymas. $M(3)$.

b) Per atkarpos AB galus ir jos vidurio tašką M nubrėžkime tieses, lygiagrečias koordinačių ašims. Kadangi taškai M, D ir C yra tiesėje lygiagrečioje x ašiai, tai $MD = x - 2$, $MC = 8 - x$. Taškai B ir C bei A ir D yra tiesėse lygiagrečiose y ašiai, todėl $AD = y - 2$, $BC = 6 - y$. Trikampiai AMD ir BMC yra lygūs pagal kraštinę ir du kampus prie jos. Vadinasi, $MD = MC$. Todėl



$$x - 2 = 8 - x,$$

$$x = \frac{8+2}{2} \text{ (atkarpos } AB \text{ galų abscisių aritmetinis vidurkis),}$$

$$x = 5.$$

Analogiškai $AD = BC$, todėl

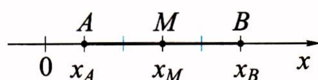
$$y - 2 = 6 - y,$$

$$y = \frac{6+2}{2} \text{ (atkarpos } AB \text{ galų ordinačių aritmetinis vidurkis),}$$

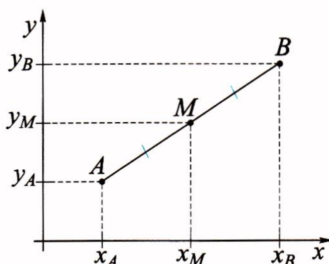
$$y = 4.$$

Atsakymas. $M(5; 4)$.

Atkarpos vidurio taško koordinatės lygios atkarpos galų atitinkamų koordinačių sumos pusei (aritmetiniam vidurkiui).



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

? Kam lygios schemoje nubrėžtų atkarpų JO, OG, GP ir PR vidurio taškų koordinatės?

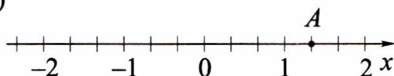
Pratimai ir uždaviniai

1. Nurodykite koordinačių tiesėje pažymėto taško koordinatę:

a)



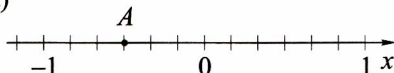
b)



c)



d)



2. Koordinačių tiesėje pažymėkite taškus $A(3)$, $B(7)$, $C(-2)$, $D(-4{,}5)$ ir $E(10)$. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų:

a) A ir B; b) A ir C; c) B ir D; d) C ir D; e) E ir C; f) E ir D.

3. Lentelėje raskite teisingą atstumo tarp taškų $K(a)$ ir $L(b)$ reikšmę.

Taško koordinatės		Atstumo KL reikšmės			
a	b	**A**	**B**	**C**	**D**
−5	4	−9	−1	1	9
3	−5	−2	8	−8	2
−2	−9	11	−7	7	−11

4. Skaičių tiesėje pažymėkite visus taškus $M(x)$, kurių koordinatės:

a) $x > 4$ b) $x < 3$ c) $x < -3$ d) $x \geqslant 2$
*e) $|x| = 2$ *f) $|x| < 3$ *g) $|x| > 2$ *h) $|x| \leqslant 4$

5*. $A(-2)$, $B(2)$, $C(x)$ ir $O(0)$ — koordinačių tiesės taškai. Nurodykite x reikšmes, su kuriomis būtų teisingi teiginiai:

a) $OC > 3$; b) $AC = 4$; c) $BC \leqslant 2$; d) $OC \leqslant 4$.

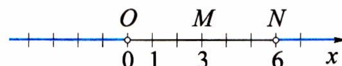
Atsakymą iliustruokite grafiškai.

Pavyzdys. $M(3)$, $N(x)$, $O(0)$ — koordinačių tiesės taškai. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga nelygybė $MN > 3$?

Sprendimas. Taikydami atstumo tarp dviejų koordinačių tiesės taškų formulę, gauname: $MN = |x - 3|$. Kai $x \geqslant 3$, $MN = x - 3$; kai $x < 3$, $MN = 3 - x$. Sprendžiame nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} x - 3 > 3, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 3 - x > 3, \\ x < 3 \end{cases}$$

$x > 6$ $\qquad$ $x < 0$.



Atsakymas. Ieškomos x reikšmės priklauso intervalams $(-\infty; 0)$ ir $(6; +\infty)$.

---

6. Kaip išsidėstę koordinačių plokštumoje taškai, kurių abscisė lygi:

a) 4; b) -2; c) 4,5; d) -3; e) 0?

7. Kaip išsidėstę koordinačių plokštumoje taškai, kurių ordinatė lygi:

a) 5; b) $-2,5$; c) -4; d) 1; e) 0?

8. a) Kuris iš taškų: $E(-1; 3)$, $F(3; -2)$, $G(2; -3)$, $H(4; 5)$ yra arčiausiai x ašies?

b) Kuris iš taškų: $M(-3; 2)$, $N(3; 4)$, $K(-4; -3)$, $L(5; 4)$ nuo x ašies nutolęs tiek pat, kaip ir taškas $A(-3; 4)$?

9. Koordinačių plokštumoje pažymėkite tašką $M(-3; 2)$ ir tašką jam simetrišką:

a) x ašies atžvilgiu; b) y ašies atžvilgiu;

c) koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Užrašykite gautojo taško koordinates.

10. Duotos trys kvadrato $ABCD$ viršūnės:

a) $A(1; 2)$, $B(4; 2)$, $C(4; 5)$; b) $A(2; 2)$, $B(2; 6)$, $C(6; 6)$.

Raskite viršūnės D koordinates ir nubraižykite kvadratą.

11. Raskite atstumą nuo duotojo taško M iki koordinačių pradžios taško:

a) $M(12; 5)$; b) $M(-3; 4)$; c) $M(15; -8)$; d) $M(-6; -8)$.

12. Raskite atstumą tarp taškų:

a) $M(2; 2)$ ir $N(5; 6)$ b) $M(2; 2)$ ir $K(5; -2)$

c) $A(7; 0)$ ir $B(-5; 5)$ d) $P(1; 3)$ ir $L(7; 7)$

13. Raskite koordinačių tiesės atkarpos vidurio taško koordinatę, kai žinomos atkarpos galų taškų koordinatės:

a) $A(2)$ ir $B(8)$ b) $M(3)$ ir $N(-9)$

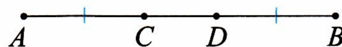
c) $P(-2)$ ir $R(4)$ d) $C(-5)$ ir $D(-1)$

14. Koordinačių plokštumoje nubraižykite atkarpą, kurios galai yra duotieji taškai. Raskite atkarpos vidurio taško M koordinates ir pažymėkite jį brėžinyje:

a) $A(0; 0)$, $B(8; 6)$ b) $C(-6; 5)$, $D(-2; 1)$

c) $M(-2; -1)$, $N(4; 3)$ d) $P(3; -5)$, $K(-3; 1)$

15*. Nuo atkarpos CD galų į skirtingas puses atidėtos lygios atkarpos $AC = BD$.



Atstumas tarp atkarpų AC ir BD vidurio taškų lygus 8 cm, o atkarpos AB ilgis lygus 12 cm. Koks atkarpos CD ilgis?

A 6 cm **B** 4 cm **C** 5 cm **D** 2 cm

16*. Nurodykite tašką, kuris yra simetriškas taškui $A(7; 12)$ taško $B(2; 3)$ atžvilgiu:

A $K(-3; 6)$ **B** $L(-5; -6)$ **C** $M(-3; -6)$ **D** $N(-5; 6)$

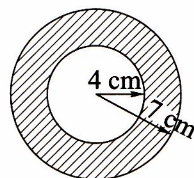
Pavyzdys. a) Nurodykite tašką, simetrišką taškui $A(4; 7)$ taško $B(1; 5)$ atžvilgiu.
Sprendimas. Sakykime, kad taškui $A(4; 7)$ simetriškas taškas taško $B(1; 5)$ atžvilgiu yra $A_1(x; y)$. Tuomet taškas B yra atkarpos AA_1 vidurio taškas ir yra teisingos lygybės: $\frac{4+x}{2} = 1$ ir $\frac{7+y}{2} = 5$.
Išsprendę lygtis gauname: $x = -2$ ir $y = 3$.
Atsakymas. Ieškomasis taškas — $(-2; 3)$.

b) Ar simetriški taškai $M(4; 5)$ ir $N(2; -1)$ taško $K(3; 2)$ atžvilgiu?
Sprendimas. Kadangi $\frac{4+2}{2} = 3$, o $\frac{5+(-1)}{2} = 2$, tai taškai simetriški.

---

17. Lygiašonio trikampio perimetras lygus 80 cm, o pagrindas — 30 cm. Apskaičiuokite trikampio:
a) šoninę kraštinę; b) aukštinę, nubrėžtą į pagrindą;
c) plotą; d) aukštinę, nubrėžtą į šoninę kraštinę.

18. Pagal brėžinio duomenis raskite užbrūkšniuotos figūros plotą.



19. Raskite kubo įstrižainės ilgį, jeigu kubo briauna lygi:
a) 4 cm; b) 6 cm.

20. Apskaičiuokite:
a) $0{,}25 \cdot \left(-2\frac{4}{7}\right) \cdot \frac{2}{3}$; b) $-24 \cdot \frac{5}{18} : \left(-\frac{1}{3}\right)$.

21. Suprastinkite reiškinį:
a) $(5 + m)^2 + (m - 2)(m + 2) - 2m(m + 5)$;
b) $(c + 3)^2 - 2c(c - 2) + (c - 4)(c + 4)$.

22. Ekskursantai 135 km kelią įveikė 3 h plaukdami kateriu ir 1,5 h važiuodami autobusu. Koks katerio greitis, jeigu už autobuso greitį jis:
a) dvigubai mažesnis; b) trigubai mažesnis?

23*. Kiek sveikųjų sprendinių tenkina nelygybę $-18 < x < 174$?

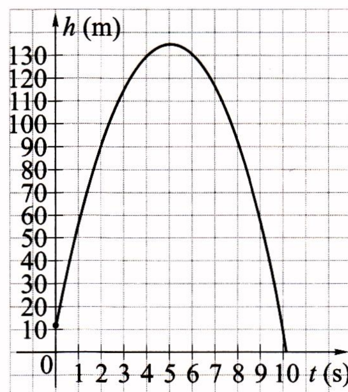
A 18 **B** 174 **C** 189 **D** 190 **E** 191

24*. To paties mėnesio trys sekmadieniai buvo neporinės dienos. Kokia savaitės diena buvo to mėnesio 2-oji diena?

A pirmadienis **B** penktadienis **C** šeštadienis
D pirmadienis arba šeštadienis **E** penktadienis arba sekmadienis

2 Funkcija ir jos grafikas

Iš 10,2 m aukščio vertikaliai aukštyn iš lanko paleista strėlė. Strėlės aukščio h (metrais) priklausomybė nuo laiko t (sekundėmis) pavaizduota grafiškai. Ją galima užrašyti formule $h(t) = 10{,}2 + 50t - 5t^2$. Strėlės aukštį h kiekvienu laiko momentu t galima rasti iš grafiko arba apskaičiuoti remiantis formule. Sakoma, kad h yra laiko t funkcija $h = f(t)$; t — nepriklausomas kintamasis (argumentas), h — priklausomas kintamasis (funkcija).



Taisyklė, pagal kurią kiekvienai vieno dydžio reikšmei priskiriama vienintelė kito dydžio reikšmė, vadinama funkcija.

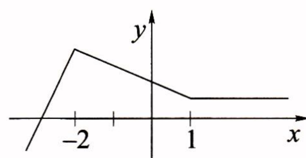
Strėlė lėkė 10,2 s, todėl funkcijos apibrėžimo sritis (galimos t reikšmės) yra intervalas (0; 10,2), t. y. $D(f) = (0; 10{,}2)$. Strėlės aukštis virš žemės buvo ne didesnis kaip 135,2 m, todėl funkcijos reikšmių sritis (galimos h reikšmės) yra intervalas [0; 135,2], t. y. $E(f) = [0; 135{,}2]$.
Per pirmąsias 5 sekundes strėlė kilo, o per likusį laiką — leidosi. Kitaip sakant, kai argumento t reikšmės didėja nuo 0 iki 5, tai grafiko kreivė kyla aukštyn ir h reikšmės atitinkamai didėja nuo 0 iki 135,2. Sakoma, kad funkcija didėja intervale (0; 5).

? Kokiame intervale funkcija $h = f(t)$ mažėja?

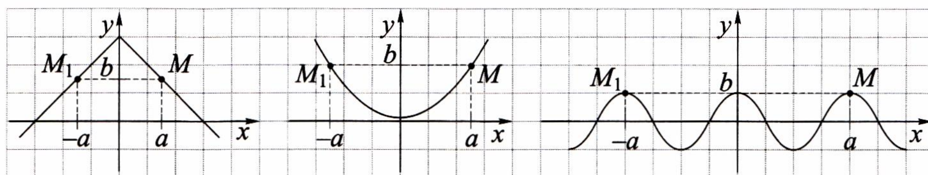
Sakoma, kad funkcija $y = f(x)$ intervale $(a; b)$:

- *didėja*, jei didesnę to intervalo argumento reikšmę atitinka didesnė funkcijos reikšmė, t. y. $f(x_2) > f(x_1)$, kai $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in (a; b)$;
- *mažėja*, jei didesnę to intervalo argumento reikšmę atitinka mažesnė funkcijos reikšmė, t. y. $f(x_2) < f(x_1)$, kai $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in (a; b)$;
- *yra pastovi*, jei kiekviename to intervalo taške funkcijos reikšmės yra lygios, t. y. $f(x_1) = f(x_2)$, kai $x_1, x_2 \in (a; b)$.

Pavyzdyje parodyta funkcija:
didėja intervale $(-\infty; -2)$;
mažėja intervale $(-2; 1)$;
yra pastovi intervale $(1; +\infty)$.

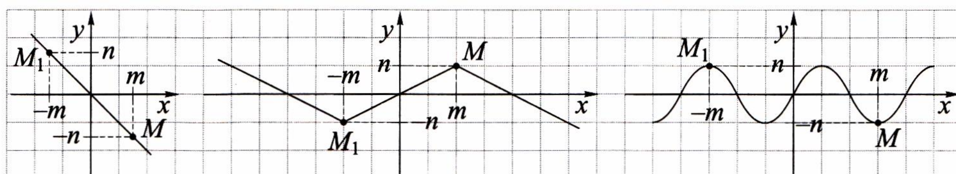


Žemiau pavaizduotų funkcijų grafikai yra simetriški y ašies atžvilgiu.



Jeigu kiekvieną grafiką lenktume taip, kad lenkimo linija sutaptų su y ašimi, tai grafiko dalys, atitinkančios teigiamas ir neigiamas argumento reikšmes, sutaptų. Jeigu taškas $M(a;\, b)$ priklauso grafikui, tai ir jam simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu taškas $M_1(-a;\, b)$ taip pat priklauso grafikui. Tokios funkcijos vadinamos *lyginėmis*.

Funkcijos, kurių grafikai yra simetriški koordinačių pradžios taško atžvilgiu, vadinamos *nelyginėmis*. Pavyzdžiui:

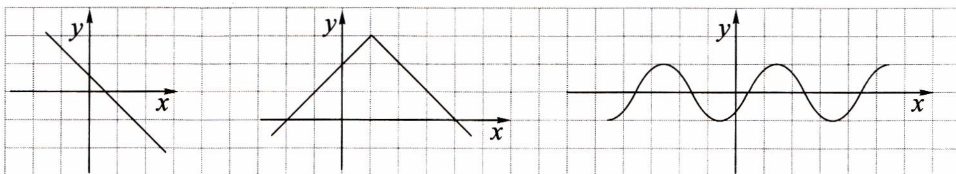


Jeigu taškas $M(m;\, n)$ priklauso funkcijos grafikui, tai ir jam simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu taškas $M_1(-m;\, -n)$ taip pat priklauso grafikui.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama:

- *lygine*, jei visiems x, priklausantiems funkcijos apibrėžimo sričiai, yra teisinga lygybė $f(-x) = f(x)$;
- *nelygine*, jei visiems x, priklausantiems funkcijos apibrėžimo sričiai, yra teisinga lygybė $f(-x) = -f(x)$.

Funkcija gali būti nei lyginė, nei nelyginė. Štai tokių funkcijų grafikų pavyzdžiai:



? Kodėl anksčiau nagrinėta strėlės aukščio kitimo funkcija $h = f(t)$ yra nei lyginė, nei nelyginė?

Panagrinėkime funkcijas, kurių apibrėžimo sritis — natūralieji skaičiai. Funkcija, apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje, vadinama *seka*.

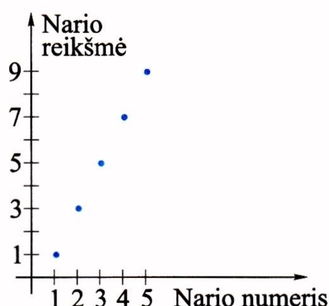
PAVYZDYS. Panagrinėkime nelyginių skaičių seką: $1, 3, 5, \ldots$. Sekos nario reikšmė priklauso nuo jo eilės numerio. Kadangi eilės numeriai — natūralieji skaičiai, tai galima sakyti, kad nelyginiai skaičiai yra natūraliojo argumento funkcijos reikšmės.
Funkciją pavaizduokime lentele:

Eil. Nr.	1	2	3	4	5	...
Skaičius	1	3	5	7	9	...

Funkciją galima užrašyti formule $f(n) = 2n - 1$, $n \in \boldsymbol{N}$. Norint pabrėžti, kad funkcijos reikšmės priklauso nuo nario eilės numerio, jos paprastai žymimos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Todėl formulę patogu užrašyti taip: $a_n = 2n - 1$, $n \in \boldsymbol{N}$.

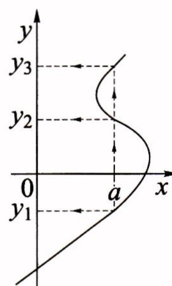
? Kam lygus 100-tasis sekos narys? Kelintas sekos narys lygus 111?

Nubraižykime funkcijos $f(n) = 2n - 1$, $n \in \boldsymbol{N}$, grafiką. Kaip matome grafiką sudaro atskiri taškai, kurių nejungiame.



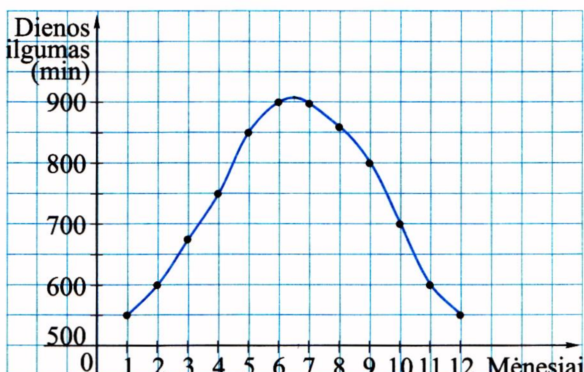
Funkcijos grafikas — visuma koordinačių plokštumos taškų, kurių abscisės yra argumento reikšmės, o ordinatės — atitinkamos funkcijos reikšmės.

Ne kiekviena kreivė yra funkcijos grafikas. Pavaizduotoji kreivė nėra funkcijos grafikas, nes vieną argumento reikšmę (pvz., $x = a$) atitinka ne viena y reikšmė, t. y. tiesė, lygiagreti y ašiai, kerta kreivę ne viename taške.



Pratimai ir uždaviniai

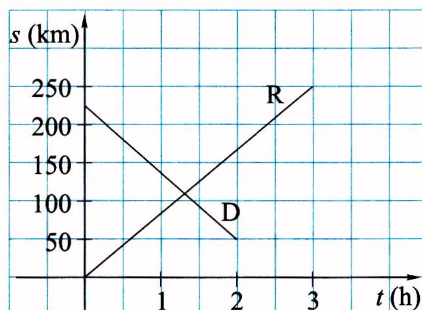
25. Grafikas vaizduoja dienos ilgumo priklausomybę nuo metų laiko Švedijoje. Ordinačių ašyje nurodytas dienos ilgumas (minutėmis) pirmąją mėnesio dieną, abscisių ašyje — mėnesio numeris.



a) Koks dienos ilgumas buvo kovo; birželio; rugsėjo; gruodžio pirmąją dieną?
b) Koks vidutinis dienos ilgumas buvo sausio; liepos; spalio mėnesį?
c) Kokiu metų laiku dienos ilgesnės už 650 minučių ir trumpesnės už 750 minučių?
d) Kuriais mėnesiais dienos ilgėjo; trumpėjo?
e) Raskite ilgiausios dienos trukmę valandomis; trumpiausios — valandomis ir minutėmis.
f) Pažiūrėkite į kalendorių ir nubraižykite analogišką dienos ilgumo Lietuvoje grafiką.

26. Tuo pačiu laiku ir tuo pačiu keliu vienas priešais kitą išvažiavo Rimas iš Kretingos ir Dainius iš Kauno. Automobilių važiavimo grafikas parodytas brėžinyje.

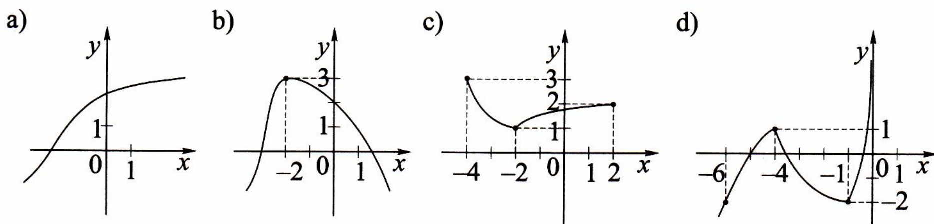
Remdamiesi brėžiniu nustatykite:
a) atstumą nuo Kauno iki Kretingos;
b) po kiek laiko nuo išvažiavimo momento Rimas ir Dainius susitiko;
c) kiek kilometrų buvo nuvažiavęs kiekvienas, kai jie susitiko;
d) kokiu greičiu važiavo Dainius ir kokiu Rimas.



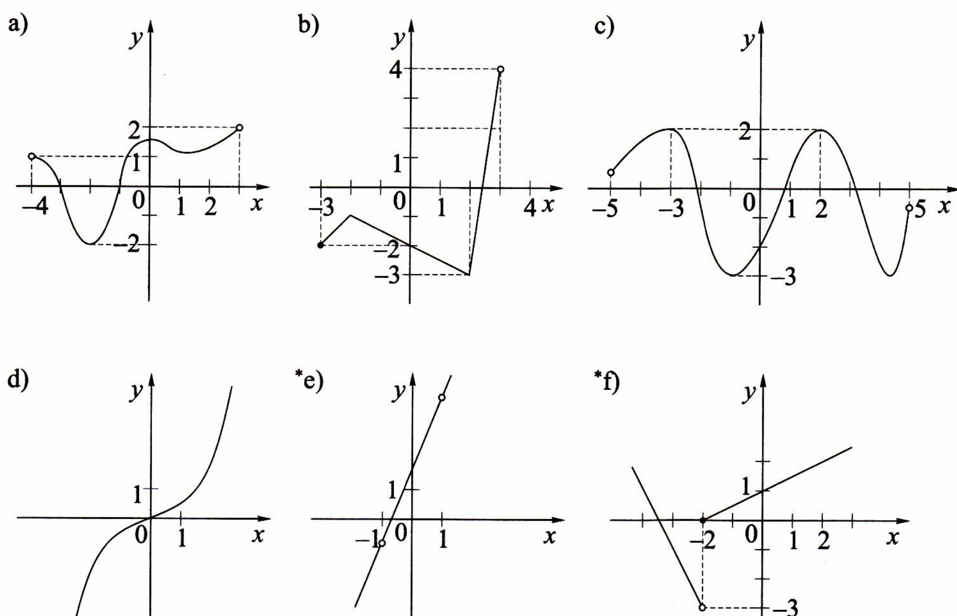
27. Perskaitykite lygybę ir nurodykite priklausomąjį ir nepriklausomąjį kintamąjį:

a) $y = 3x - 10$　　b) $y = 2x^3$　　c) $s = 2t - 30$
d) $V(h) = 2\pi r^2 h$　　e) $C(r) = 2\pi r$　　f) $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

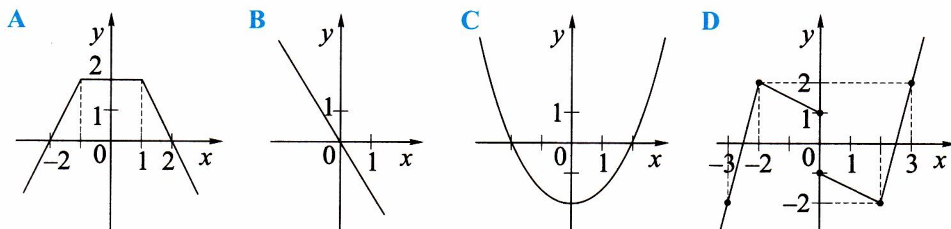
28. Remdamiesi funkcijos grafiku, nurodykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus:



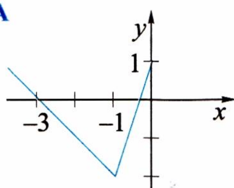
29. Remdamiesi grafiku, nurodykite funkcijos apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį:

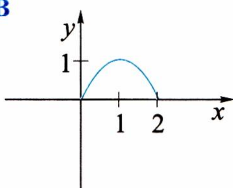


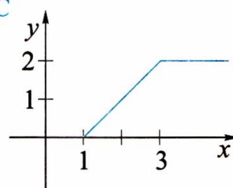
30. Kuris grafikas yra lyginės funkcijos; kuris nelyginės funkcijos?



31. Nubraižyta funkcijos $y = f(x)$ grafiko dalis. Pabaikite braižyti funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jeigu žinoma, kad funkcija yra:
a) lyginė; b) nelyginė.

A


B


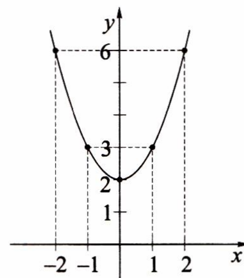
C


32. Nurodykite, kurios funkcijos lyginės, kurios nelyginės:

a) $f(x) = 2x$ b) $g(x) = x^3 - 4x$ c) $v(x) = x^2 - 4$
d) $h(x) = 5h^3$ e) $s(x) = x^4 + 1$ f) $u(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$

Pavyzdys. Įrodykime, kad funkcija $f(x) = x^2 + 2$ yra lyginė.
Įrodymas. Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė. Su kiekviena x reikšme:
$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$.
Kadangi $f(-x) = f(x)$, tai funkcija $f(x) = x^2 + 2$ yra lyginė.
Nubraižykime tos funkcijos scheminį grafiką. Raskime kelių taškų koordinates.

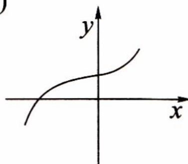
x	0	1	2
$y = f(x)$	2	3	6

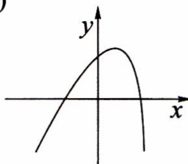


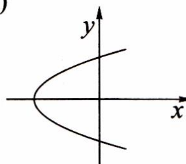
Pažymėkime taškus $(x; y)$, ir jiems simetriškus taškus y ašies atžvilgiu. Per pažymėtuosius taškus brėžkime kreivę.

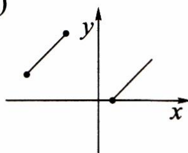
---

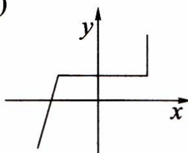
33. Ar kreivė yra funkcijos grafikas?

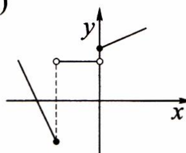
a)


b)


c)


d)


e)


f)


34. Užrašykite pirmuosius penkis sekos narius, kai n-tojo sekos nario formulė yra:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = \frac{1}{n}$

d) $a_n = 3n - 2$ e) $a_n = n^2$ f) $a_n = 3^n$

*g) $a_n = (-1)^n + 3$ *h) $a_n = (-1)^n \cdot 10$ *i) $a_n = (-1)^n \cdot 2 - 1$

Pavyzdys. Užrašykite pirmuosius penkis sekos narius, kai $a_n = 4n - 2$.
Sprendimas. $a_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$; $a_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 6$; $a_3 = 4 \cdot 3 - 2 = 10$; $a_4 = 4 \cdot 4 - 2 = 14$; $a_5 = 4 \cdot 5 - 2 = 18$.
Atsakymas. 2, 6, 10, 14, 18.

---

35. Užrašykite formule seką skaičių:
a) kartotinių skaičiui 3;
b) kartotinių skaičiui 5;
*c) kuriuos dalijant iš 3 gaunama liekana lygi 2.

36. Turistas 10 km važiavo autobusu, po to ta pačia kryptimi x h ėjo pėsčiomis 5 km/h greičiu.
Užrašykite atstumo y (km), kurį nukeliavo turistas nuo išvykimo vietos, priklausomybę nuo laiko x (h).

37. Šilo seniūnija nustatė tokias komunalinių paslaugų gyventojams kainas: karšto vandens 1 m^3 — 13,6 Lt, šalto vandens 1 m^3 — 9,98 Lt, dujų 1 m^3 — 0,7 Lt.
Užrašykite mokesčio priklausomybę nuo x, kai x reiškia:
a) suvartoto karšto vandens kiekį (m^3);
b) suvartoto šalto vandens kiekį (m^3);
c) suvartotų dujų kiekį (m^3).

38. Viena stačiakampio kraštinė yra x cm, kita — 4 cm ilgesnė.
a) Užrašykite stačiakampio perimetro $P(x)$ ir ploto $S(x)$ priklausomybę nuo kraštinės ilgio x (cm).
b) Raskite $P(5)$; $S(5)$; $P(2{,}5)$; $S(4{,}5)$.
c) Su kuria x reikšme perimetro reikšmė lygi 36 cm; 50 cm?

39. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = 4x - 1$ b) $g(x) = 2x + 5$ c) $f(x) = \frac{3x^2-4}{5}$

d) $u(x) = \frac{x^2+6x}{7}$ e) $f(x) = \sqrt{x-5}$ f) $s(x) = \sqrt{x+4}$

g) $f(x) = \frac{7x}{x-2}$ h) $g(x) = \frac{3+x}{x+2}$ i) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

40. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ didėja visoje apibrėžimo srityje:
a) $f(x) = 4x$; b) $f(x) = 2x + 3$; c) $f(x) = x$; d) $f(x) = x - 2$.

Pavyzdys. Įrodykime, kad funkcija $f(x) = 3x - 2$ didėja visoje apibrėžimo srityje. Funkcijos apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė, t. y. $D(f) = \boldsymbol{R}$. Imkime bet kuriuos x_1 ir x_2. Tarkime, kad $x_2 > x_1$. Palyginkime funkcijų reikšmes tuose taškuose $f(x_1)$ ir $f(x_2)$. Raskime skirtumą $f(x_2) - f(x_1)$:

$3x_2 - 2 - (3x_1 - 2) = 3x_2 - 2 - 3x_1 + 2 = 3(x_2 - x_1)$.

Matome, kad skirtumas $f(x_2) - f(x_1) > 0$, nes $x_2 - x_1 > 0$. Vadinasi, $f(x_2) > f(x_1)$. Tai reiškia, kad funkcija didėja.

---

41. Įrodykite, kad funkcija $g(x)$ mažėja visoje apibrėžimo srityje:
a) $g(x) = -x+2$; b) $g(x) = -2x$; c) $g(x) = \frac{4-x}{2}$; d) $g(x) = 4-3x$.

42. Trikampio kampų didumų santykis yra 1 : 2 : 3. Trumpiausioji kraštinė lygi 4 cm. Raskite šio trikampio:
a) kampų didumus; b) kitas kraštines; c) perimetrą; d) plotą;
e) aukštinę, nubrėžtą į ilgiausiąją kraštinę; f) kraštinių santykį.

43. Ritinio aukštinė lygi 6 cm, o pagrindo spindulys — 5 cm. Raskite ritinio:
a) šoninį paviršių; b) visą paviršių; c) tūrį.

44. a) Bibliotekoje 12% visų knygų — žodynai. Kiek knygų turi biblioteka, jeigu joje yra 990 žodynų?
b) Bibliotekoje 9% visų knygų — vaikų literatūra. Kiek knygų turi biblioteka, jeigu joje yra 972 vaikų literatūros knygos?

45. Išspręskite lygtį:
a) $\frac{x+1}{7} = \frac{2x-1}{5}$; b) $\frac{y-2}{8} = \frac{2y-4}{3}$.

46. Skaičius, parašytus romėniškaisiais skaitmenimis, parašykite arabiškaisiais skaitmenimis:
a) DCVIII; b) CXIX; c) DL; d) XL; e) CDXXV.

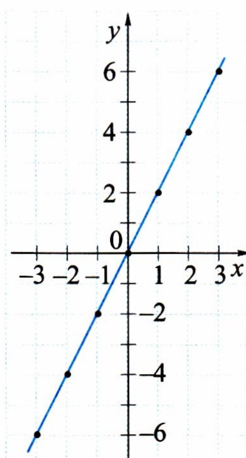
47. Mama savo vaikams davė saldainių: dukrai — pusę visų saldainių ir dar 1 saldainį, o sūnui — pusę likusių ir dar 5 saldainius. Kiek saldainių išdalijo mama savo vaikams?

48*. Automobilis pirmąją kelio pusę važiavo 60 km/h greičiu, o antrąją pusę — 80 km/h greičiu. Koks buvo vidutinis automobilio greitis visame kelyje?

A 66 km/h **B** $68\frac{4}{7}$ km/h **C** 70 km/h **D** 72 km/h **E** 74 km/h

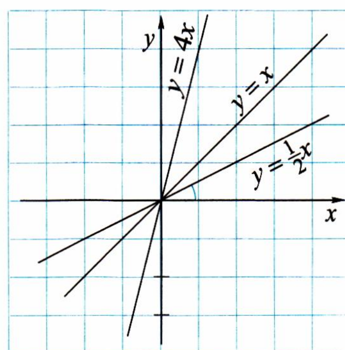
3 Funkcija $f(x) = kx$

Nubraižykime funkcijos $f(x) = 2x$ grafiką.
Pasirinkę keletą argumento reikšmių, sudarykime funkcijos reikšmių lentelę.



x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
$y = 2x$	...	−6	−4	−2	0	2	4	6	...

Koordinačių plokštumoje atidėkime taškus $(x; y)$. Sujungę juos matome, kad gautieji taškai priklauso tiesei, einančiai per koordinačių pradžią.
Panašiai galėtume įsitikinti, kad su bet kuriomis k reikšmėmis funkcijos $f(x) = kx$ grafikas yra tiesė, einanti per koordinačių pradžią.

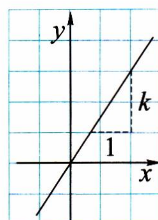


Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime funkcijų $f(x) = kx$ grafikus, imdami kelias teigiamąsias k reikšmes. Matome, kad visos tiesės eina per I ir III ketvirčius. Kuo didesnė koeficiento k reikšmė, tuo tiesė $y = kx$ su teigiamąja x ašies kryptimi sudaro didesnį kampą. Skaičius k vadinamas *tiesės krypties koeficientu*.

Užduotis. Nubraižykite funkcijų

$$f(x) = -\frac{1}{2}x, \quad f(x) = -x \quad \text{ir} \quad f(x) = -4x$$

grafikus. Per kuriuos ketvirčius eina tiesės? Kaip tiesių su teigiamąja x ašies kryptimi sudaromas kampas priklauso nuo krypties koeficiento?



Nurodysime dar vieną koeficiento k savybę.
Imkime dvi nepriklausomo kintamojo reikšmes x_1 ir x_2. Tada $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$. Vadinasi, funkcijos $f(x) = kx$ argumentui padidėjus vienetu, funkcijos reikšmė pakinta skaičiumi k.

? Kokia funkcijos $f(x) = kx$ apibrėžimo sritis?
Ką galite pasakyti apie funkciją $f(x) = kx$, kai $k = 0$?

Pratimai ir uždaviniai

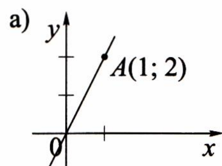
49. Nurodykite, kurias funkcijas galima išreikšti pavidalu $f(x) = kx$ ir kam lygus krypties koeficientas k:

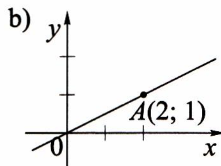
a) $f(x) = 2{,}5x$ b) $f(x) = \frac{x}{5}$
c) $f(x) = \frac{x-3}{3} + 1$ d) $f(x) = \frac{4}{x}$
e) $f(x) = \frac{4-x}{2} - 2$ *f) $f(x) = (x-2)(x+2) - (x-3)^2$
*g) $f(x) = (\sqrt{2} + x)^2 - 2 - x^2$ *h) $f(x) = x^2 + 0{,}25 - (x - 0{,}5)^2$

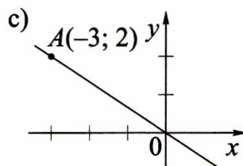
50. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

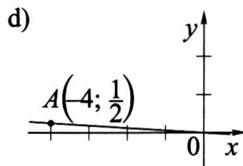
a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = -2{,}5x$ c) $f(x) = 1{,}5x$
d) $f(x) = 1\frac{1}{3}x$ e) $f(x) = -0{,}4x$ f) $f(x) = \frac{3}{4}x$

51. Formule užrašykite funkciją, kurios grafikas yra nubraižytoji tiesė:

a) 

b) 

c) 

d) 

52. Nebraižydami funkcijos grafiko nurodykite koordinačių plokštumos ketvirčius, kuriuose jis būtų:

a) $f(x) = 251x$ b) $f(x) = -13x$
c) $f(x) = 0{,}14x$ d) $f(x) = -4x$

53. Kurie taškai priklauso funkcijos $f(x) = \frac{1}{3}x$ grafikui:

$A(6; 2)$, $B(-3; -1)$, $C\left(-7; 2\frac{1}{3}\right)$, $O(0; 0)$, $D\left(8; -2\frac{2}{3}\right)$?

54. Nubraižykite funkcijos $f(x) = kx$ grafiką, jeigu žinoma, kad jam priklauso taškas M:

a) $M(2; 6)$; b) $M(5; 10)$; c) $M(-4; 16)$; d) $M(12; -48)$.

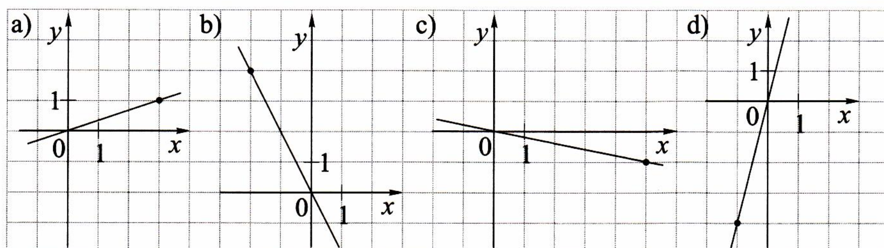
55. Tiesė eina per koordinačių pradžios tašką ir per tašką $M(-2; 8)$. Ar ši tiesė yra funkcijos $f(x)$ grafikas:

a) $f(x) = 4x$; b) $f(x) = 2x$; c) $f(x) = -4x$; d) $f(x) = -2x$?

56. Duota funkcija $f(x) = 6x$. Apskaičiuokite:

a) $f(0)$; b) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$; c) $f\left(\frac{5}{12}\right)$; d) $f\left(-\frac{7}{6}\right)$.

57. Duotos funkcijos $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = 4x$, $h(x) = -2x$ ir $u(x) = -\frac{1}{5}x$. Nurodykite kiekvieną funkciją atitinkantį grafiką. Kurios iš jų yra didėjančios, kurios — mažėjančios?



58. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ didėjanti:

a) $f(x) = 6x$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x$; c) $f(x) = 12x$; d) $f(x) = 2{,}4x$.

59. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ mažėjanti:

a) $f(x) = -7x$; b) $f(x) = -2{,}5x$; c) $f(x) = -\frac{2}{3}x$; d) $f(x) = -5x$.

60. Ar tiesiogiai proporcingi šie kintamieji dydžiai:
a) teigiamasis skaičius a ir už jį du kartus didesnis skaičius;
b) apskritimo spindulys ir jo ilgis;
c) teigiamasis sveikasis skaičius b ir jam atvirkštinis skaičius;
d) skritulio plotas ir jo spindulys?
Atsakymus motyvuokite.

61. Sūnui yra a metų, tėvui — b metų. Užbaikite pildyti lentelę.

a	3	4	5	6	8	10		
b	27						40	50
$\frac{b}{a}$								

a) Kaip kinta santykis $\frac{b}{a}$?
b) Ar proporcingi dydžiai a ir b?
c) Ar kada nors tėvas bus tris kartus vyresnis už sūnų?
d) Jeigu bus, kiek tuomet bus sūnui metų?
e) Ar gali santykis $\frac{b}{a}$ būti lygus vienetui?

62. Kelias į kalną kas 15 metrų pakyla 1,2 m. Nuo kalno papėdės iki rūmų ant kalno yra 375 m. Kokiame aukštyje yra rūmai?

63. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 2,4 dm, o aukštinė, nubrėžta į pagrindą — 1,6 dm. Raskite trikampio:
a) plotą;
b) šoninę kraštinę;
c) perimetrą;
d) aukštinę, nubrėžtą į šoninę kraštinę;
e) šoninės kraštinės ir pagrindo santykį.

64. Kūgio aukštinė lygi 6 cm, o sudaromoji — 10 cm. Raskite kūgio pagrindo:
a) spindulį; b) plotą; c) apskritimo ilgį.

65. Stačiakampio plotis yra x cm, o ilgis — 6 cm didesnis. Parašykite reiškiniu šio stačiakampio:
a) perimetrą; b) plotą.

66. Du skaičius, kurių vienas yra 0,6 skaičiaus 30, o kitas — $\frac{2}{7}$ skaičiaus 14:
a) sudėkite; b) atimkite; c) sudauginkite; d) padalykite.

67. Suprastinkite reiškinį $2a+3((4a+9)\cdot 2-6a)$. Su kuria a reikšme reiškinio reikšmė lygi 0?

68. Išspręskite nelygybę:

a) $6x \leqslant -18$
b) $-4x < 36$
c) $0{,}5(x-2)+1{,}5x \leqslant x+1$
d) $2x+1 > 1{,}5x-0{,}5(2-x)$

69. Popieriaus lapas perplėšiamas į keturias dalis, po to viena dalis dar į 4 dalis, po to nauja viena dalis vėl į 4 dalis ir taip iš viso 10 kartų. Kiek susidarė skiautelių?

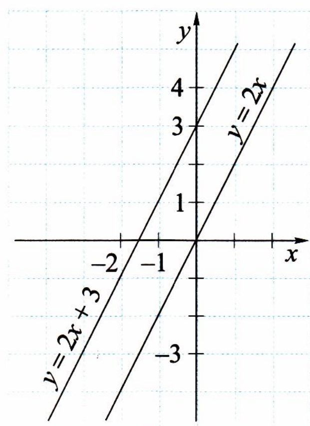
A 120 **B** 40 **C** 36 **D** 31 **E** teisingas atsakymas nepateiktas



4 Funkcija $f(x) = kx + b$

Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime funkcijų $g(x) = 2x$ ir $f(x) = 2x + 3$ grafikus. Pasirinkę keletą argumento reikšmių sudarykime funkcijos reikšmių lentelę ir koordinačių plokštumoje atidėkime taškus, kurių koordinatės yra $(x; y)$.

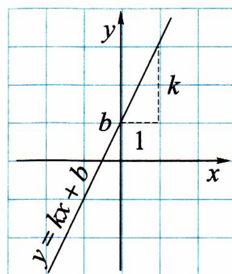
x	$y = 2x$	$y = 2x + 3$
...	...	...
−2	−4	−1
−1	−2	1
0	0	3
1	2	5
2	4	7
...	...	...



Sujungę taškus matome, kad funkcijų grafikai yra lygiagrečios tiesės. Taip yra visada, kai tiesių krypties koeficientai yra vienodi.

Funkcijos $y = f(x)$ reikšmės trimis vienetais didesnės už atitinkamas funkcijos $y = g(x)$ reikšmes. Todėl funkcijos $y = f(x)$ grafiką galima gauti pastūmus grafiką funkcijos $y = g(x)$ per 3 vienetines atkarpas aukštyn. Taigi tiesė $y = 2x + 3$ kerta y ašį taške, kurio ordinatė lygi 3.

Funkcijos $f(x) = kx + b$ grafikas yra *tiesė*; čia k — tiesės *krypties koeficientas*, b — ordinatė taško, kuriame tiesė *kerta y ašį*.



Užduotis. Kam lygus tiesės $y = -x - 7$ krypties koeficientas ir kuriame taške ši tiesė kerta y ašį? Parašykite lygtį tiesės, kuri būtų lygiagreti tiesei $y = -x - 7$ ir eitų per koordinačių pradžios tašką.

Užduotis. Duota funkcija $f(x) = 2x + 3$.

1) Apskaičiuokite:

a) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(10)$;

b) $f(2) - f(1)$, $f(3) - f(2)$;

c) $\frac{f(10)-f(1)}{10-1}$, $\frac{f(10)-f(2)}{10-2}$, $\frac{f(10)-f(3)}{10-3}$, $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$.

2) Kam lygus funkcijos reikšmių skirtumo ir atitinkamų argumento reikšmių skirtumo santykis?

Kai žinomos dvi funkcijos $f(x) = kx + b$ reikšmės $f(x_1)$ ir $f(x_2)$ atitinkančios argumento reikšmes x_1 ir x_2, tai galima apskaičiuoti tos funkcijos koeficientą k, remiantis formule:

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Įrodymas. Kadangi

$$f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1),$$

tai

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k.$$

1 PAVYZDYS. Parašykime lygtį tiesės, kuri eina per taškus (2; 3) ir (1; 2).

Sprendimas. Užrašykime $f(x) = kx + b$. Raskime k:

$$k = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3 - 2}{1} = 1.$$

Vadinasi, $f(x) = 1 \cdot x + b = x + b$.

Raskime b. Kadangi $f(1) = 2$, tai $2 = 1 + b$. Iš čia $b = 1$.

Atsakymas. $f(x) = x + 1$.

Funkcija, kurią galima išreikšti formule $f(x) = kx + b$ (x — nepriklausomas kintamasis, k ir b — skaičiai), vadinama tiesine funkcija.

Kadangi reiškinys $kx + b$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis, tai tiesinės funkcijos $f(x) = kx + b$ apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė. Atsižvelgiant į konkretaus uždavinio sąlygą, funkcijos apibrėžimo sritis gali būti siauresnė.

Kai tiesinės funkcijos apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių aibė, tai funkcijos reikšmės sudaro seką, vadinamą *aritmetine progresija.*
Panagrinėkime funkciją $f(n) = 3n + 2$, kai $n \in \boldsymbol{N}$.
Apskaičiuokime funkcijos reikšmes a_n, kai $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$a_1 = f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5;$$
$$a_2 = f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8;$$
$$a_3 = f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11;$$
$$a_4 = f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = f(n) = 3n + 2.$$

Funkcijos reikšmės 5, 8, 11, 14, ... sudaro skaičių seką (aritmetinę progresiją), kurios kiekvienas narys pradedant antruoju yra didesnis už prieš jį esantį 3 vienetais.

Skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kurios kiekvienas narys pradedant antruoju skiriasi nuo prieš jį esančio nario tuo pačiu skaičiumi d, vadinama aritmetine progresija. Skaičius d vadinamas aritmetinės progresijos skirtumu.

Bet kurį aritmetinės progresijos narį a_n galima išreikšti pirmuoju nariu a_1 ir progresijos skirtumu d.
Kadangi tiesinės funkcijos $f(x) = kx + b$ koeficientas k parodo, kiek pakinta funkcijos reikšmė, kai argumento reikšmė padidėja vienetu, tai jis yra lygus aritmetinės progresijos skirtumui d. Raskime koeficiento b reikšmę. Kai $x = 1$, tai $f(1) = d \cdot 1 + b$ arba $a_1 = d + b$, iš kur išplaukia, kad $b = a_1 - d$.
Gauname: $f(n) = dn + (a_1 - d)$ arba

$$a_n = dn + a_1 - d = a_1 + (dn - d) = a_1 + (n - 1)d$$

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ — aritmetinės progresijos n-tojo nario formulė.

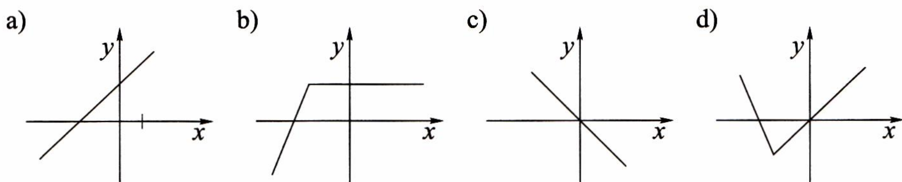
UŽDAVINYS. Parašykite aritmetinės progresijos $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ n-ojo nario formulę ir apskaičiuokite jos 21-ąjį narį.

Sprendimas. Kadangi pirmasis progresijos narys lygus -6, o skirtumas lygus 2, tai $a_n = -6 + 2(n - 1) = 2n - 8$. Remdamiesi formule gauname $a_{21} = 2 \cdot 21 - 8 = 34$.

? Kam lygus aritmetinės progresijos 17-tas narys, jei pirmasis narys lygus 0, o skirtumas lygus 3?

Pratimai ir uždaviniai

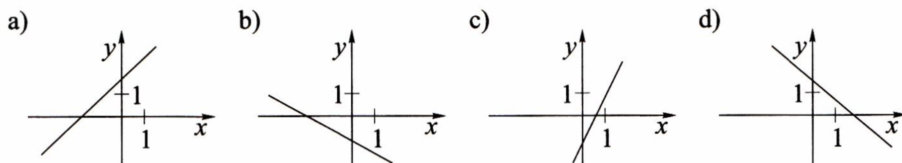
70. Nurodykite atvejus, kuriuose nubraižytas tiesinės funkcijos grafikas:



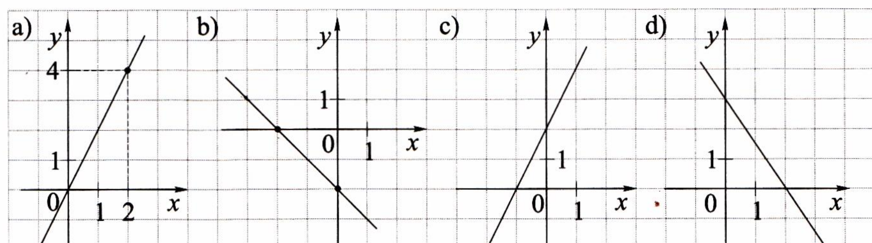
71. Nurodykite, kurios iš duotųjų funkcijų yra tiesinės ir kam lygios koeficientų k ir b reikšmės:

a) $f(x) = 2{,}7x - 6$; b) $f(x) = \frac{4x-5}{7}$; c) $f(x) = \frac{3}{x} + 2$;
d) $f(x) = \frac{2x}{11}$; *e) $f(x) = (x+2)^2 + (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$.

72. Remdamiesi grafiku nurodykite tiesinės funkcijos $f(x) = kx + b$ koeficientų k ir b ženklus:



73. Užrašykite tiesinę funkciją, kurios grafikas yra nubraižytoji tiesė:



74. Tiesinės funkcijos reikšmės: $f(-1) = 3$ ir $f(3) = -5$.

a) Kodėl $\frac{f(8)-f(3)}{8-3} = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$? b) Raskite $f(8)$.

75. Užrašykite tiesinę funkciją, kurios grafikas eina per taškus:

a) $(2; 4)$, $(3; 3)$; b) $(3; 4)$, $(-1; 2)$; c) $\left(1; \frac{11}{6}\right)$, $\left(2; \frac{10}{3}\right)$.

76. Nubraižykite tiesinių funkcijų grafikus:

a) $f(x) = 2x - 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2$
c) $f(x) = 4x$ d) $f(x) = -x + 3$

77. Kurios iš duotųjų sekų yra aritmetinės progresijos?

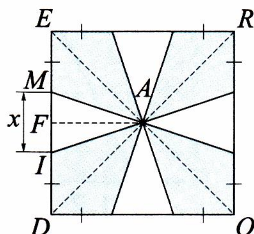
a) $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ b) $2, 7, 12, 17, 22, \ldots$
c) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ d) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
e) $5, 3, 1, -1, -3, \ldots$ f) $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$

78. Raskite pirmuosius penkis aritmetinės progresijos narius, kai žinomas pirmasis progresijos narys a_1 ir progresijos skirtumas d:

a) $a_1 = 4,\ d = 2$ b) $a_1 = -3,\ d = 4$ c) $a_1 = 7,\ d = -2$
d) $a_1 = -\frac{1}{2},\ d = 1$ e) $a_1 = 2\frac{1}{3},\ d = -\frac{1}{2}$ f) $a_1 = 2,\ d = \frac{3}{7}$

79. Žurnalo „Jaunystė“, kuris pasirodo kiekvieną antradienį (52 kartus per metus), leidėjas siūlo du tarifus:
1) neprenumeratoriams žurnalo kaina — 3 Lt,
2) prenumeratoriams — metinis mokestis 30 Lt, ir po 2 Lt už kiekvieną numerį.
a) Kuris tarifas naudingesnis įsigyjant 20 numerių?
b) Kiek reikėtų užmokėti už 26 numerius pagal antrąjį tarifą?
c) Kiek daugiausiai numerių galima įsigyti už 200 Lt?
d) Numerių skaičių pažymėkite x, metinę žurnalo kainą litais — y ir užrašykite y priklausomybę nuo x kaip funkciją $f(x)$ prenumeratoriams ir kaip funkciją $g(x)$ — neprenumeratoriams.
e) Nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus.

80. Brėžinyje pavaizduotas karpinys iš kvadrato: $DORE$ — kvadratas, kurio kraštinė lygi 16 m. A — kvadrato įstrižainių susikirtimo taškas.
a) Trikampio AMI plotą y išreikškite funkcija nuo x.
b) Įrodykite, kad nuspalvintos figūros plotas $S(x) = 256 - 16x$.

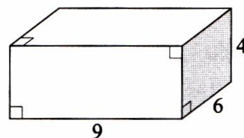


c) Su kuria x reikšme šis plotas lygus 64?
d) Apskaičiuokite AM ilgį, kai $x = 12$.
e) Įrodykite, kad nuspalvintos figūros perimetras lygus 96, kai $x = 12$.

81. Justė, Ieva ir Akvilė skuba į teatrą ir norėtų važiuoti taksi, tačiau jos kartu teturi 6 Lt. Akvilė prisiminė, kad važiuodama taksi už 2 km sumokėjo 3 Lt, o Justė — kad už 3 km sumokėjo 3 Lt 90 ct. Iki teatro yra 5 km. Žinodami, kad mokestis yra nuvažiuoto atstumo tiesinė funkcija, apskaičiuokite, ar pavyks mergaitėms į teatrą nuvažiuoti taksi. (Mokestis už kilometrą ir įsėdimo mokestis visais atvejais buvo skaičiuojamas vienodai.)

82. Trikampio kampų didumų santykis yra 1 : 1 : 2. Trumpesniųjų kraštinių suma lygi 36 cm. Raskite šio trikampio:
a) kampus;
b) ilgiausiąją kraštinę ir perimetrą;
c) plotą;
d) aukštinę, nubrėžtą į ilgiausiąją kraštinę.

83. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio:
a) šoninį paviršių; b) visą paviršių; c) tūrį.
d) Koks būtų figūros šoninio paviršiaus plotas, jeigu figūrą pastatytume ant nuspalvintos sienos?



84. Jonas nori padalyti skritulį viena arba dviem tiesiomis linijomis į 2; 3; 4 ir 5 dalis (nebūtinai lygias). Kiek iš šių užduočių Jonui pavyks atlikti?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

85. Raskite trijų skaičių sandaugą, jeigu pirmasis skaičius lygus $\frac{6}{7}$, antrasis sudaro $\frac{7}{18}$ pirmojo skaičiaus, o trečiasis — 20% pirmųjų dviejų skaičių sumos.

86. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $-5ab - 5b$ b) $p^2 - 2p^4 + p^6$
c) $2(a - b) - y(b - a)$ *d) $(a - 1)^3 - (a - 1)(3a + 1)$

87. Suprastinę reiškinį x^6x^{-3} gausime:

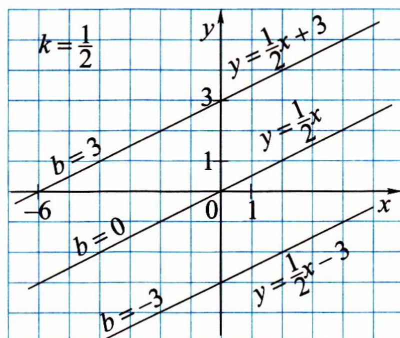
A x^{18} **B** x^{-2} **C** x^9 **D** x^{-18} **E** x^3

88. Svetainės baldų komplekto didmeninė kaina yra 2250 Lt, o parduotuvėje jis kainuoja — 2970 Lt.
a) Koks svetainės baldų komplekto antkainis?
b) Koks svetainės baldų komplekto procentinis antkainis?
c) Kokia būtų komplekto kaina, jeigu jį būtų galima įsigyti parduotuvėje su 9% nuolaida?
*d) Koks būtų baldų komplekto procentinis antkainis parduodant jį su 9% nuolaida?

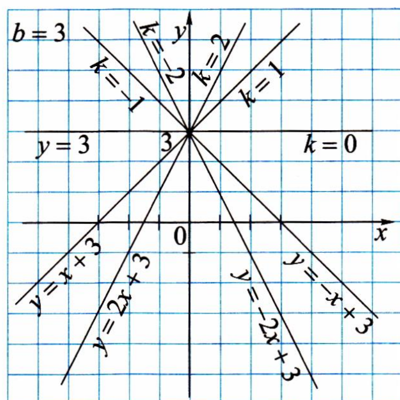
89. Du turistai ant laužo virė košę. Vienas jų košei virti davė 400 g kruopų, o kitas — 200 g. Tik jie baigė virti — atėjo trečias turistas. Visi jie suvalgė košės po lygiai, ir trečiasis turistas už savo dalį sumokėjo 60 ct. Kaip pirmieji du turistai turi pasidalyti pinigus?

5 Dviejų tiesių tarpusavio padėtis plokštumoje. Tiesės lygtis

Koordinačių plokštumoje nubraižykime tiesinių funkcijų $f(x) = kx + b$ grafikus, kai koeficientai k yra lygūs, o b reikšmės skirtingos. Matome, kad kai funkcijų $f(x) = kx + b$ koeficientai k yra vienodi, tai tiesės $y = f(x)$ yra lygiagrečios.



Koordinačių plokštumoje nubraižykime tiesinių funkcijų $f(x) = kx + b$ grafikus, kai skaičiai b yra lygūs, o k reikšmės skirtingos. Matome, kad kai funkcijų $f(x) = kx + b$ koeficientai k yra skirtingi, tai tiesės $y = f(x)$ susikerta.



? Kokia tiesių $f(x) = k_1x + b_1$ ir $f(x) = k_2x + b_2$ tarpusavio padėtis, kai $k_1 = k_2$ ir $b_1 = b_2$?

Tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$:

- *yra lygiagrečios*, jei $k_1 = k_2$, o $b_1 \neq b_2$;
- *sutampa*, jei $k_1 = k_2$, o $b_1 = b_2$;
- *susikerta*, jei $k_1 \neq k_2$, o b_1 ir b_2 — bet kokie.

? Kokia tiesių $y = 3x - 1$ ir $y = -2x + 5$ tarpusavio padėtis?

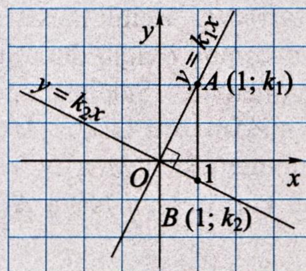
Dviejų tiesių statmenumo sąlyga

Išsiaiškinkime, kaip susiję dviejų statmenų tiesių krypties koeficientai.

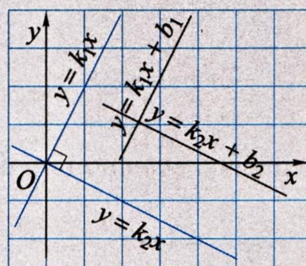
a) Nubraižykime dvi tarpusavyje statmenas tieses, einančias per koordinačių pradžios tašką. Tiesėse pažymėkime taškus A ir B, kurių abscisės lygios 1. Šių taškų ordinatės lygios atitinkamų tiesių krypties koeficientams. Sujungę taškus A ir B, gauname statųjį trikampį AOB. Remiantis Pitagoro teorema: $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Remiantis atstumo tarp dviejų taškų formule gauname: $OA^2 = 1 + k_1^2$, $OB^2 = 1 + k_2^2$, $AB^2 = (k_1 - k_2)^2$. Įstatę gautas išraiškas į lygybę $AB^2 = OA^2 + OB^2$ turime:

$$(k_1 - k_2)^2 = 1 + k_1^2 + 1 + k_2^2,$$
$$k_1^2 - 2k_1 \cdot k_2 + k_2^2 = 2 + k_1^2 + k_2^2,$$
$$-2k_1 \cdot k_2 = 2,$$

$$\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$$



b) Nubraižykime dvi tarpusavyje statmenas tieses $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$, neinančias per koordinačių pradžios tašką. Per koordinačių pradžios tašką nubrėžkime tieses, lygiagrečias duotosioms. Nubrėžtų tiesių krypties koeficientai atitinkamai lygūs duotųjų tiesių krypties koeficientams, nes tos tiesės yra lygiagrečios. Todėl duotųjų tiesių krypties koeficientų sandauga lygi -1, t. y. $k_1 \cdot k_2 = -1$.



Jeigu dvi tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$ yra statmenos viena kitai, tai jų krypties koeficientų sandauga lygi -1, t. y. $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Teisingas ir atvirkščias teiginys:

Jeigu dviejų tiesių krypties koeficientų sandauga $k_1 \cdot k_2 = -1$, tai tos tiesės yra statmenos.

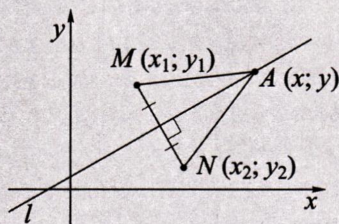
Pavyzdžiui, tiesių $y = x$ ir $y = -x$ krypties koeficientų sandauga lygi $1 \cdot (-1) = -1$. Ir žinome, kad tiesės tikrai yra statmenos, nes jos yra I ir II koordinačių ketvirčių pusiaukampinės.

Tiesės lygtis

Žinome, kad tiesinės funkcijos $f(x) = kx + b$ grafikas yra tiesė. Tačiau lygiagreti y ašiai tiesė nėra funkcijos grafikas. Ar egzistuoja lygtis, kuria būtų galima nusakyti kiekvieną tiesę, nubrėžtą koordinačių plokštumoje?

Bet kurią plokštumos tiesę galima nusakyti lygtimi $ax + by + c = 0$; čia x, y — tiesei priklausančių taškų koordinatės, a, b, c — skaičiai, ir bent vienas iš skaičių a ir b nelygus nuliui.

Įrodymas. Remkimės iš geometrijos žinomu teiginiu: visi taškai, vienodai nutolę nuo dviejų duotųjų taškų, yra tuos taškus jungiančios atkarpos vidurio statmenyje. Stačiakampėje koordinačių sistemoje nubrėžkime tiesę l. Pažymėkime du taškus $M(x_1; y_1)$ ir $N(x_2; y_2)$, simetriškus tiesės l atžvilgiu. Tuomet taškai M ir N vienodai nutolę nuo tiesės l, ir $MN \perp l$. Pažymėkime bet kurį tiesės l tašką $A(x; y)$ ir sujunkime jį su taškais M ir N.



Remiantis atstumo tarp dviejų taškų formule gauname:

$$AM^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2, \qquad AN^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2.$$

Kadangi l yra atkarpos MN vidurio statmuo, tai $AM = AN$. Vadinasi,

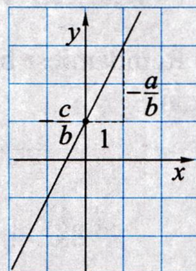
$$AM^2 = AN^2,$$
$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2,$$
$$x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2 = x_2^2 - 2x_2x + x^2 + y_2^2 - 2y_2y + y^2,$$
$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + \left(y_1^2 + x_1^2 - y_2^2 - x_2^2\right) = 0 \qquad (1)$$

Bent vienas iš skirtumų $x_2 - x_1$ ir $y_2 - y_1$ nelygus nuliui, nes taškai M ir N skirtingi.

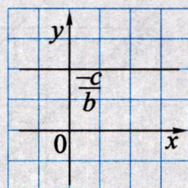
Pažymėkime $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $y_1^2 + x_1^2 - y_2^2 - x_2^2 = c$. Tuomet (1) lygtį galime užrašyti taip: $ax + by + c = 0$, ir bent vienas iš skaičių a, b nelygus nuliui. Ši lygtis vadinama *bendrąja tiesės lygtimi*.

Panagrinėkime atskirus bendrosios tiesės lygties atvejus.

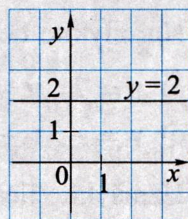
1. Kai $a \neq 0$, $b \neq 0$, tai bendrąją tiesės lygtį galima užrašyti pavidalu $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Pastaroji lygtis kartais vadinama kryptine tiesės lygtimi. Laisvasis narys $-\frac{c}{b}$ parodo, kur tiesė kerta y ašį, o koeficientas $-\frac{a}{b}$ yra tiesės krypties koeficientas.



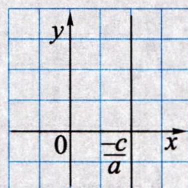
2. Kai $a = 0$, $b \neq 0$, tai turime lygtį $0 \cdot x + by + c = 0$. Su visomis x reikšmėmis $by + c = 0$, $y = -\frac{c}{b}$. Ši lygtis nusako tiesę, kuri yra lygiagreti x ašiai ir eina per tašką, kurio ordinatė $-\frac{c}{b}$.



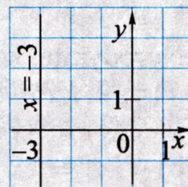
Pavyzdžiui, kai $a = 0$, $b = 3$, $c = -6$, tai tiesės lygtis yra $0 \cdot x + 3y - 6 = 0$, $y = 2$.



3. Kai $a \neq 0$, $b = 0$, tai turime lygtį $ax + 0 \cdot y + c = 0$. Su visomis y reikšmėmis $ax + c = 0$, $x = -\frac{c}{a}$. Ši lygtis nusako tiesę, kuri yra lygiagreti y ašiai ir eina per tašką, kurio abscisė $-\frac{c}{a}$.



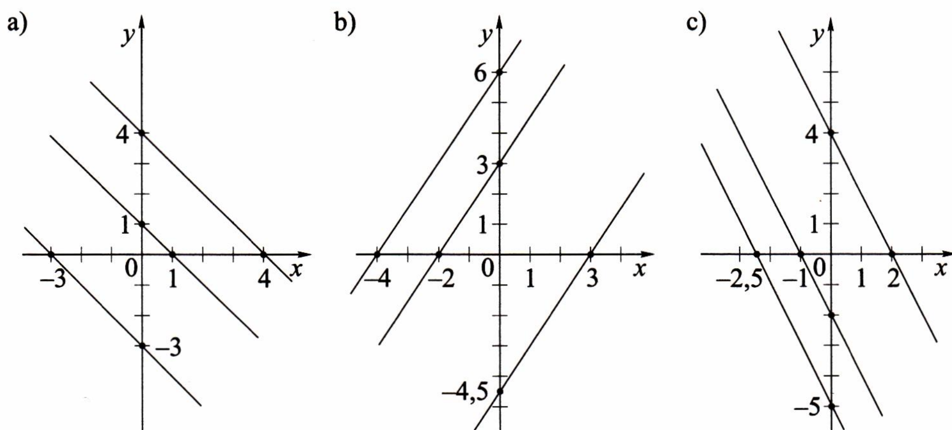
Pavyzdžiui, kai $a = 2$, $b = 0$, $c = 6$, tai tiesės lygtis yra $2x + 0 \cdot y + 6 = 0$, $x = -3$.



Užduotis. Įrodykite, kad tiesės, kurių lygtys $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$:
yra lygiagrečios, kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
susikerta, kai $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
sutampa, kai $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Pratimai ir uždaviniai

90. Remdamiesi brėžiniu raskite tiesių krypties koeficientus:



91. Nurodykite tiesių tarpusavio padėtį:

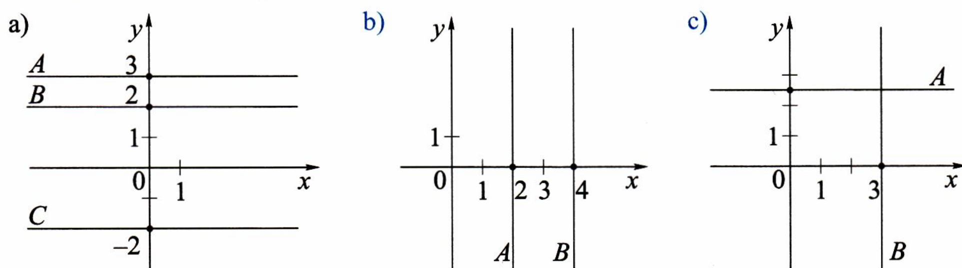
a) $y = 2x$ ir $y = 2x - 1$

b) $y = 0{,}5x + 3$ ir $y = 3x + 0{,}5$

c) $y = -3x + 1$ ir $y = \frac{1}{3}x + 1$

d) $y = \frac{2}{3}x - 3$ ir $y = 1 + \frac{2}{3}x$

92. Užrašykite tiesių lygtis:



93. Nurodykite koeficientų k ir b reikšmes, su kuriomis tiesinių funkcijų $f(x) = kx + b$ grafikai būtų lygiagrečios tiesės:

a) $f(x) = 8x + b$ ir $f(x) = kx - 1$;

b) $f(x) = kx + 5$ ir $f(x) = 12x + b$;

c) $f(x) = kx - 7$ ir $f(x) = 5x - b$;

d) $f(x) = 2x + b$ ir $f(x) = kx + 11$.

94. Nurodykite koeficientų k ir b reikšmes, su kuriomis tiesinių funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikai susikirstų:

a) $f(x) = 6x + 11$ ir $g(x) = kx + 11$;

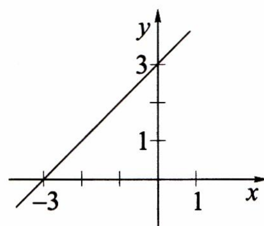
b) $f(x) = kx + 7$ ir $g(x) = x - b$;

c) $f(x) = 2{,}3x + b$ ir $g(x) = kx - 8$;

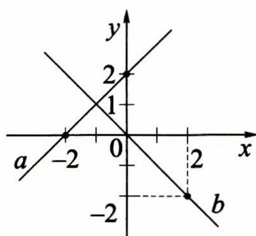
d) $f(x) = kx + 1{,}5$ ir $g(x) = 2\frac{1}{3}x + b$.

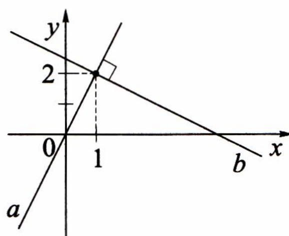
95. Užrašykite lygtį tiesės, kuri būtų lygiagreti nubrėžtajai tiesei ir eitų per tašką M:

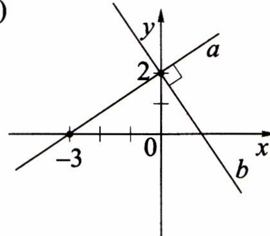
a) $M(2; 1)$;
b) $M(-3; -2)$;
c) $M(0{,}5; -4{,}5)$.



96. Raskite tiesių a ir b krypties koeficientus; užrašykite jų lygtis:

a)


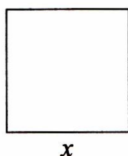
b)


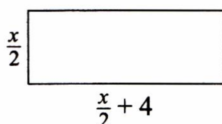
c)


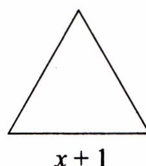
97. Nurodykite krypties koeficientą tiesės, statmenos duotajai:

a) $y = 3x - 5$; b) $y = \frac{2}{3}x + 7$; c) $y = -0{,}6x + 1$; d) $y = -4x - 2$.

98. a) Formule užrašykite duotųjų figūrų — kvadrato, stačiakampio ir lygiakraščio trikampio — perimetro priklausomybę nuo x:







b) Nubraižykite funkcijų grafikus.
c) Didėjimo tvarka surašykite figūrų perimetrų reikšmes $P_{\text{kv.}}$, $P_{\text{st.}}$, $P_{\text{tr.}}$, kai $x = 6$.
d) Mažėjimo tvarka surašykite figūrų perimetrų reikšmes, kai $x = 2{,}5$.
*e) Ar gali būti lygūs duotųjų figūrų perimetrai? Jeigu taip, nurodykite x reikšmę.

99. Kvadrato kraštinės ilgis $x + 3$, $x > 0$, o dviejų gretimų stačiakampio kraštinių ilgiai $x + 1$ ir $x + 7$.

a) Užrašykite kvadrato perimetro priklausomybę nuo x kaip funkciją $f(x)$ ir stačiakampio perimetro priklausomybę nuo x kaip funkciją $g(x)$.
b) Ar gali būti lygūs abiejų keturkampių perimetrai?
c) Nubraižykite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus.

100. Benzino kolonėlėje A įvesta savitarna, ir klientas už $1\,\ell$ benzino moka 1,8 Lt. Kolonėlėje B aptarnauja degalinės darbuotojas. Už tos pačios markės benzino $1\,\ell$ reikia mokėti 1,65 Lt, bet už pripylimą prie kainos pridedami 3 Lt.

a) Kiek sumokėtų ponas Alfas pirkdamas $15\,\ell$ benzino kolonėlėje A? kolonėlėje B?

b) Kiek sumokėtų ponas Betas pirkdamas $25\,\ell$ benzino kolonėlėje A? kolonėlėje B?

c) Ponas Gamas perka $x\,\ell$ benzino. Sudarykite mokesčio už benziną funkciją $f(x)$ kolonėlėje A ir funkciją $g(x)$ kolonėlėje B.

d) Laikydami, kad 1 cm x ašyje atitinka $2\,\ell$ benzino, o y ašyje 1 cm — 3 Lt, nubraižykite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus.

e) Kolonėlių savininkas per šventes nusprendė kolonėlėje A 2,5% sumažinti benzino kainą, o kolonėlėje B 40% sumažinti aptarnavimo kainą, bet nekeisti benzino kainos. Apskaičiuokite naująją benzino kainą kolonėlėje A ir aptarnavimo kainą kolonėlėje B.

f) Sudarykite mokesčio už benziną funkciją $f_1(x)$ kolonėlėje A ir funkciją $g_1(x)$ kolonėlėje B per šventes.

101. Kino teatre „Aušra" bilietai į kiekvieną seansą parduodami po 9 Lt. Kino teatro administracija siūlo kino klubo nario pažymėjimą, kuris metams kainuoja 50 Lt. Jį įsigijus bilieto kaina į vieną seansą būtų tik 4 Lt. Seansų skaičių pažymėkite x, metų mokestį — y ir užrašykite y priklausomybę nuo x kaip funkciją $f(x)$ klubo nariams ir kaip funkciją $g(x)$ paprastiems žiūrovams.

a) Kiek sumokėtų žiūrovas už 12 seansų per metus, jeigu turėtų nario pažymėjimą, ir kiek, jeigu jo neturėtų?

b) Kiek užmokėtų žiūrovas už 5 seansus per metus, jeigu turėtų nario pažymėjimą, ir kiek, jeigu jo neturėtų?

c) Laikydami, kad x ašyje 1 cm atitinka 2 seansus, o y ašyje 1 cm — 10 Lt, nubraižykite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus.

d) Nurodykite grafikų susikirtimo taško abscisę, pažymėkite ją a.

e) Raskite reikšmes $f(a)$ ir $g(a)$.

*f) Kuris variantas žiūrovui naudingesnis?

g) Klubo prezidentas turi garbės žiūrovo pažymėjimą, kuris metams kainuoja 110 Lt, ir lanko filmus nemokamai. Ar naudingas toks pažymėjimas einant į kiną kartą per mėnesį? Nubraižykite funkcijos $h(x) = 110$ grafiką.

102. Dvi kelionių agentūros siūlo moksleiviams keliones autobusu.
Agentūra „Kelionė" iš 20 moksleivių grupės prašo 560 Lt pradinės įmokos ir po 2,8 Lt už kiekvieną nuvažiuotą kilometrą.

Agentūra „Vilionė“ prašo 350 Lt pradinės įmokos ir po 4,2 Lt už kiekvieną nuvažiuotą kilometrą.

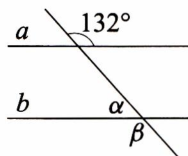
a) Kelionės kainą pažymėkite y (Lt), nuvažiuotų kilometrų skaičių — x ir užrašykite kainos y priklausomybę nuo x kaip funkciją $f(x)$ agentūroje „Kelionė“ ir kaip funkciją $g(x)$ — agentūroje „Vilionė“.

b) Laikydami, kad 1 cm x ašyje atitinka 25 km, o 1 cm y ašyje — 100 Lt, nubraižykite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus.

c) Kiek kilometrų važiuojant naudingiau būtų pasinaudoti agentūros „Kelionė“ paslaugomis?

103. Trikampio kraštinės yra 9 cm, 12 cm ir 15 cm. Raskite šio trikampio:
a) didžiausią kampą; b) plotą; c) aukštinę, nubrėžtą į ilgiausią kraštinę;
*d) atkarpas, į kurias kraštinę dalija minėta aukštinė.

104. Pagal brėžinio duomenis raskite kampus α ir β, jeigu $a \parallel b$.



105. Ritinio pagrindo skersmuo ir ritinio aukštinė yra po 10 cm. Apskaičiuokite ritinio ($\pi \approx 3{,}14$):

a) pagrindo plotą; b) šoninio paviršiaus plotą;
c) viso paviršiaus plotą; d) tūrį.

106*. Kurių reiškinių skaitinę reikšmę galima rasti?

A $\frac{7}{3\cdot4-12}$ **B** $\frac{16}{3\cdot0{,}2-\frac{2}{5}}$ **C** $\frac{21}{3{,}6-0{,}4\cdot9}$ **D** $\sqrt{(-2)^2}$ **E** $\sqrt[3]{-125}$

107. Plackartiniame vagone miegamųjų vietų 3 kartus daugiau negu minkštajame vagone, o abiejuose vagonuose iš viso yra 72 miegamosios vietos. Kiek miegamųjų vietų yra kiekviename vagone?

108. Įrodykite tapatybę:
a) $(a-b)^2 = (b-a)^2$; *b) $(a-b)^3 = -(b-a)^3$.

109. Šešių mokinių masės (1 kg tikslumu) yra: 62 kg; 60 kg; 54 kg; 56 kg; 43 kg ir 52 kg. Raskite šių duomenų:
a) vidurkį; b) medianą.

110. Prie apskrito stalo sėdi Antanaitis, Jonaitis, Petraitis ir Saulaitis. Jų vardai: Tomas, Simas, Valdas, Rimas. Žinoma, kad:

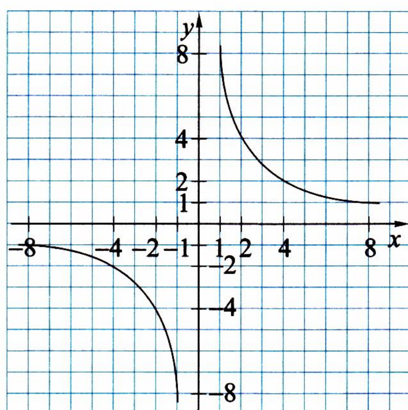
- Antanaitis ne Simas ir ne Valdas;
- Rimas sėdi tarp Jonaičio ir Tomo;
- Petraitis ne Rimas ir ne Simas;
- Saulaitis sėdi tarp Petraičio ir Valdo.

Kokie yra Antanaičio, Jonaičio, Petraičio ir Saulaičio vardai?

6 Funkcija $f(x) = \frac{k}{x}$

Nubraižykime funkcijos $f(x) = \frac{8}{x}$ grafiką. Aišku, kad funkcijos apibrėžimo sritis yra visos x reikšmės, išskyrus 0 ($D(f)$: $x \neq 0$). Pasirinkę keletą x reikšmių, sudarykime funkcijos $y = f(x)$ reikšmių lentelę ir koordinačių plokštumoje atidėkime taškus, kurių koordinatės $(x; y)$.

x	-8	-5	-4	-2	-1	1	2	4	5	8	...
y	-1	$-1{,}6$	-2	-4	-8	8	4	2	1,6	1	...

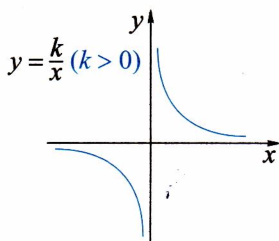


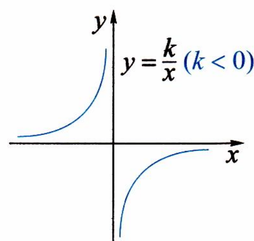
Gautoji kreivė vadinama *hiperbole*. Ji sudaryta iš dviejų šakų, simetriškų koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Užduotis. Nubraižykite funkcijos $y = \frac{-8}{x}$ grafiką. Kuriuose ketvirčiuose yra funkcijos grafikas?

Funkcijos $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, apibrėžimo sritis ir reikšmių sritis — visi realieji skaičiai, išskyrus nulį. Be to, $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$. Taigi funkcija nelyginė ir jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

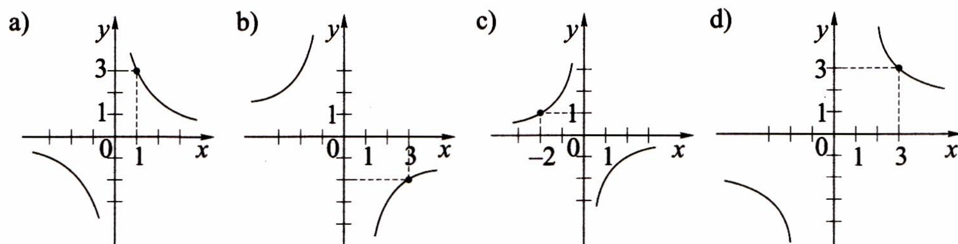
Kai $k > 0$, hiperbolė yra I ir III ketvirčiuose, kai $k < 0$ — II ir IV ketvirčiuose.





Pratimai ir uždaviniai

111. Remdamiesi grafiku raskite funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$ koeficiento k reikšmę:



112. Sudarykite funkcijos $y = f(x)$ reikšmių lentelę ir nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$; b) $f(x) = \frac{-2}{x}$; c) $f(x) = \frac{4}{x}$; d) $f(x) = \frac{-6}{x}$.

113. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus ir palyginkite jų padėtį:

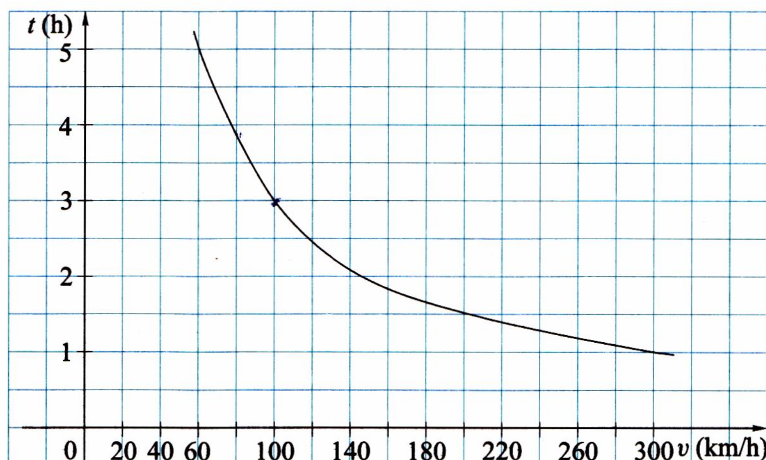
a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{6}{x}$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{4}{x}$ d) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -\frac{6}{x}$

114. Nubraižykite scheminį funkcijos grafiką:

a) $y = \frac{2{,}3}{x}$; b) $y = -\frac{7}{x}$; c) $y = \frac{4{,}5}{x}$; d) $y = -\frac{25}{7x}$.

115. Laiko (h) ir greičio (km/h) priklausomybė važiuojant iš Kretingos į Druskininkus pavaizduota grafiku.



Remdamiesi grafiku, atsakykite į klausimus:

a) Kiek reikia laiko nuvykti iš Kretingos į Druskininkus, važiuojant: 60 km/h; 80 km/h; 100 km/h greičiu?

b) Kokiu greičiu reikėtų važiuoti, norint nuvykti per: 3 h; 4 h; 2,5 h?

c) Koks atstumas tarp Kretingos ir Druskininkų?

116. 600 km atstumą traukinys v km/h greičiu nuvažiuoja per t h. Parašykite:

a) greičio v priklausomybės nuo laiko t formulę;

b) laiko t priklausomybės nuo greičio v formulę;

c) priklausomybę pavaizduokite grafiškai.

117. Nubraižykite funkcijos $f(x) = \frac{3}{x}$ grafiką.

a) Nurodykite funkcijos apibrėžimo sritį.

b) Raskite funkcijos reikšmes, atitinkančias argumento reikšmes: -4; -2; 2; 4.

c) Raskite argumento reikšmes, atitinkančias funkcijos reikšmes: -3; -2; 2; 3.

d) Su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja neigiamąsias reikšmes?

e) Nurodykite funkcijos didėjimo; mažėjimo intervalus.

118. Nurodykite k reikšmę, jeigu žinoma, kad funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$ grafikas eina per tašką:

a) $A(-16; -0{,}5)$; b) $B(-0{,}5; 4)$; c) $C\left(\frac{3}{4}; 8\right)$; d) $D(5; 2{,}4)$.

119. Nubraižykite funkcijos $f(x) = -\frac{2}{x}$ grafiką ir remdamiesi juo nurodykite keletą x reikšmių, su kuriomis y reikšmės būtų:

a) didesnės už 0; b) didesnės už -2; c) didesnės už -6.

120. Nubraižykite funkcijos $f(x) = -\frac{4}{x}$ grafiką ir remdamiesi juo nurodykite keletą x reikšmių, su kuriomis y reikšmės būtų:

a) mažesnės už 3; b) mažesnės už -2; c) mažesnės už 6.

121. Ar priklauso funkcijos $f(x) = \frac{126}{x}$ grafikui taškai:

a) $A(6; 21)$; b) $B(-3; -42)$; c) $C(0; -126)$; d) $D(-9; 14)$?

122. Ar priklauso funkcijos $f(x) = \frac{144}{x}$ grafikui taškai:

a) $A\left(-7; 20\frac{4}{7}\right)$; b) $B(6; 24)$; c) $C(0; 144)$; d) $D(12; -12)$?

123. Žemės spindulys prie pusiaujo apytiksliai lygus 4000 mylių. Reaktyvinis lėktuvas apskrido aplink Žemę vidutiniu 500 mylių per valandą greičiu (Žemės atžvilgiu). Jeigu neatsižvelgsime į skridimo aukštį, tai skridimo laiko tiksliausias įvertinimas valandomis yra:

A 8 **B** 25 **C** 50 **D** 75 **E** 100

124. a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = \frac{12}{x}$ ir $g(x) = 3x$ grafikus. Nurodykite apytiksles grafikų susikirtimo taškų koordinates.

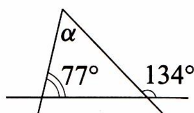
b) Remdamiesi grafiku raskite tas x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x) = \frac{12}{x}$ reikšmės teigiamos; neigiamos. Raskite funkcijos didėjimo; mažėjimo intervalus.

125. Rombo įstrižainės yra 30 cm ir 40 cm. Raskite šio rombo:

a) plotą; b) kraštinę ir perimetrą; c) aukštinę;

*d) įstrižainių susikirtimo taško atstumą iki kraštinės.

126. Pagal brėžinio duomenis raskite kampą α.



127. Raskite kubo tūrį, jeigu kubo sienos įstrižainė lygi:

a) $3\sqrt{2}$ cm; *b) a cm.

128. Apskaičiuokite laipsnių 4^{-2} ir 2^{-2}:

a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį;

*e) sandaugos kvadratinę šaknį; *f) dalmens kubo pusę.

129. Suprastinkite reiškinį $(8 - 3a)^2 - (a - 6)(6 + a) + 44a$. Kam lygi jo reikšmė, kai $a = -5$?

A 320 **B** 280 **C** 150 **D** 125 **E** 0

130. Iš Smiltynės ir Preilos, tarp kurių yra 32 km, tuo pačiu metu vienas priešais kitą išplaukė kateris ir motorinė valtis. Jie susitiko po 24 minučių. Kokiu greičiu plaukė kiekvienas laivas, jeigu motorinės valties greitis 40 km/h mažesnis už katerio greitį? Spręsdami sudarykite lygtį nežinomuoju x pažymėję:

a) motorinės valties greitį; b) katerio greitį.

131. Keturiose kortelėse po vieną įrašyti skaitmenys 1, 2, 3 ir 4, o iš kortelių jas įvairiai dėliojant sudarinėjami triženkliai skaičiai. Kiek galima sudėlioti skirtingų skaičių, kurie dalijasi iš 3?

A 8 **B** 10 **C** 12 **D** 14 **E** 16

132. Dėdė Petras nugėrė $\frac{1}{6}$ pilno puodelio juodos kavos, po to prisipylė iki viršaus grietinėlės ir gerai išmaišė. Po to vėl nugėrė trečdalį puodelio ir vėl prisipylė iki viršaus grietinėlės ir išmaišė. Vėl nugėrė pusę puodelio, prisipylė grietinėlės ir išmaišė. Pagaliau dėdė Petras išgėrė visą puodelį. Ko daugiau — juodos kavos ar grietinėlės — išgėrė dėdė Petras?

Pasitikrinkite

1. Koordinačių tiesėje pažymėkite taškus: $A(2)$, $B(-3)$, $C(5{,}5)$ ir $D(-1{,}5)$. Raskite atstumą tarp taškų:
a) A ir B; b) A ir C; c) B ir C; d) C ir D.

2. Raskite koordinačių tiesės atkarpos vidurio taško M koordinatę, kai žinomos atkarpos galų taškų koordinatės:
a) $A(2)$, $B(8)$; b) $P(-2)$, $T(6)$; c) $K(1{,}5)$, $L(5{,}5)$.

3. a) Nubraižykite trikampį ABC, kurio viršūnės yra taškuose: $A(-3;\,0)$, $B(4;\,5)$, $C(0;\,-4)$. Raskite kraštinės AB susikirtimo su Oy ašimi taško koordinates.
b) Nubraižykite trikampį CDE, kurio viršūnės yra taškuose $C(0;\,-2)$, $D(0;\,-4)$, $E(5;\,3)$. Raskite kraštinės CE susikirtimo su Ox ašimi taško koordinates.

4. Dvi kvadrato $ABCD$ viršūnės yra taškuose: $A(-3;\,7)$ ir $B(-3;\,-1)$. Raskite kitų dviejų viršūnių koordinates.

5. Raskite atstumą nuo koordinačių pradžios taško iki taško:
a) $A(3;\,4)$; b) $B(-5;\,12)$; c) $C(4;\,-3)$; d) $D(-2;\,-6)$.

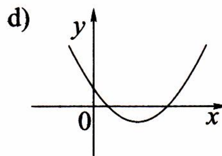
6. Raskite atstumą tarp taškų:

a) $A(2;\,7)$ ir $B(-2;\,7)$ b) $A(-5;\,1)$ ir $B(-5;\,-7)$
c) $A(-3;\,0)$ ir $B(0;\,4)$ d) $A(0;\,3)$ ir $B(-4;\,0)$

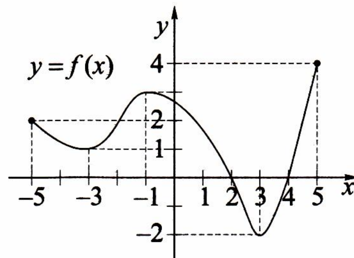
7*. Trikampio viršūnės yra taškuose $A(-3;\,-1)$, $B(1;\,-1)$, $C(1;\,-3)$. Įrodykite, kad trikampis ABC yra status.

8. Kuris grafikas nėra funkcijos grafikas?

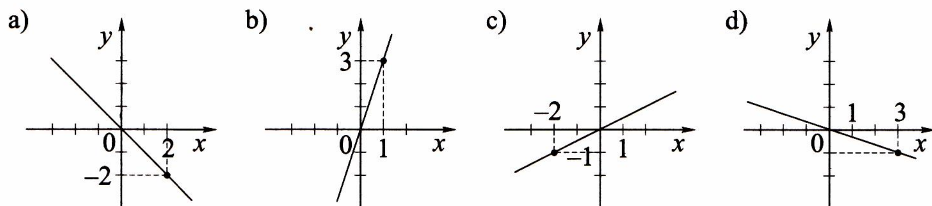
a) b) c) d)



9. Nustatykite funkcijos $y = f(x)$:
a) apibrėžimo sritį;
b) reikšmių sritį;
c) didėjimo ir mažėjimo intervalus;
d) didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmę.
e) Su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja teigiamąsias reikšmes; neigiamąsias reikšmes?

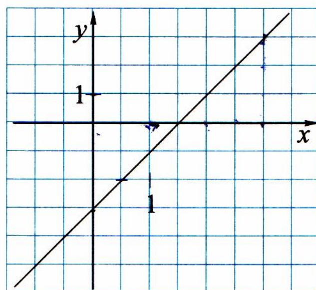


10. Užrašykite tiesinę funkciją, kurios grafikas yra nubraižytoji tiesė:



11. Remdamiesi grafiku užpildykite lentelę:

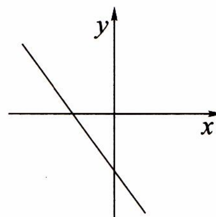
x	0	3	5	−2				
$f(x)$					4	0	−1	−2



a) Nurodykite koordinates taškų, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis.
b) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x) = 0$?
c) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x) > 0$?
d) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x) < 0$?

12. Duota tiesinė funkcija $f(x) = 5x - 1$. Raskite $f(0{,}2)$ ir x reikšmę, su kuria funkcijos reikšmė lygi 89. Ar priklauso funkcijos grafikui taškas $A(-11; 54)$?

13. Kurią funkciją atitinka grafikas?



A $f(x) = -2x - 3$
B $f(x) = -2x + 3$
C $f(x) = 2x + 3$
D $f(x) = -2x$
E $f(x) = 2x - 3$

14. Užrašykite lygtį tiesės, einančios per taškus M ir N:

a) $M(1; 1)$, $N(3; 5)$ b) $M(2; 6)$, $N(-2; -6)$
c) $M(-2; 3)$, $N(8; -2)$ d) $M(-1; 4)$, $N(5; -8)$

15. Kurie iš taškų $A(3; 8)$, $B(0; 3)$, $C(0; -3)$, $D(1; 0)$ priklauso tiesinės funkcijos $f(x) = -3 - \frac{5}{3}x$ grafikui?

16. Nubraižykite funkcijų grafikus:

a) $f(x) = -3x$ b) $f(x) = x - 4$ c) $f(x) = 3$
d) $f(x) = \frac{1}{3}x$ e) $f(x) = 2x - 1$ f) $f(x) = -2$

17. Nurodykite teisingus atsakymus:

Funkcija $f(x) = -\frac{3}{2}x - 5$	Siūlomi atsakymai A	B	C
a) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ lygu	0	-6	-4
b) Funkcijos grafikas yra tiesė, kurios lygtis	$y = \frac{2}{3}x - 5$	$y = -\frac{3}{2}x$	$y = -\frac{3}{2}x - 5$
c) Argumento reikšmę, lygią 2, atitinka funkcijos reikšmė, lygi	-8	-2	-7
d) Funkcijos reikšmę, lygią -5, atitinka argumento reikšmė, lygi	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
e) Santykis $\frac{f(\frac{9}{2})-f(\frac{23}{11})}{\frac{9}{2}-\frac{23}{11}}$ lygus	$\frac{15}{11}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{22}$
f) Funkcijos grafikas yra			

18. Nurodykite koeficientų k ir b reikšmes, kad tiesės būtų lygiagrečios:

a) $y = 2x + b$ ir $y = kx + 3$ b) $y = -5x + 1{,}9$ ir $y = kx + b$
c) $y = kx + 2{,}5$ ir $y = 2{,}1x - b$ d) $y = \frac{3}{7}x - 1$ ir $y = -kx + b$

19. Užrašykite tiesinę funkciją, kurios grafikas būtų tiesė, kertanti tiesę:

a) $y = 5x - 4$; b) $y = -0{,}2x + 1{,}5$; c) $y = \frac{2}{7}x + 3$; d) $y = x$.

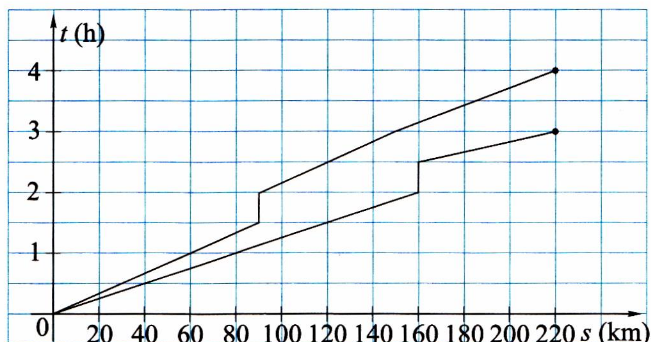
20. a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = \frac{8}{x}$ ir $g(x) = 5x$ grafikus. Raskite apytiksles grafikų susikirtimo taškų koordinates.

b) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = -\frac{4}{x}$ ir $g(x) = -\frac{1}{4}x$ grafikus. Raskite apytiksles grafikų susikirtimo taškų koordinates.

21. Raskite pirmuosius penkis aritmetinės progresijos narius, kai žinomas pirmasis progresijos narys a_1 ir skirtumas d:

a) $a_1 = 3$, $d = 2$; b) $a_1 = -1{,}5$, $d = 2{,}5$; c) $a_1 = 4$, $d = -1{,}5$.

22. Iš Kauno į Klaipėdą Justė keliavo autobusu, sustojančiu Kryžkalnyje, o Tomas savo automobiliu važiavo už autobusą greičiau, bet irgi buvo sustojęs pakelės poilsinėje.



Remdamiesi kelionės grafiku, atsakykite į klausimus:

a) Kiek kilometrų nutolo nuo Kauno Tomas ir kiek Justė per pirmąsias dvi kelionės valandas?

b) Kiek kilometrų nuvažiavo kiekviena mašina iki sustodama?

c) Kiek laiko važiavo autobusas ir automobilis iki sustodami?

d) Raskite autobuso ir automobilio greitį iki jiems sustojant.

e) Kiek laiko stovėjo autobusas? automobilis?

f) Kokiu greičiu po sustojimo važiavo autobusas? automobilis?

23. Pradinė vandens temperatūra virdulyje yra 6°C. Kaitinant temperatūra kiekvieną minutę pakyla 2°C. Užrašykite temperatūros T (°C) priklausomybę nuo kaitinimo laiko t (min.).

a) Ar funkcija $T(t)$ tiesinė?

b) Apskaičiuokite $T(20)$; $T(31)$.

c) Po kurio laiko užvirs vanduo?

24. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ilgis lygus 30 cm, o šio trikampio perimetras — 108 cm. Raskite lygiašonio trikampio:

a) pagrindą;

b) kraštinių santykį;

c) aukštinę, nubrėžtą į pagrindą;

d) plotą;

*e) aukštinę, nubrėžtą į šoninę kraštinę.

25. Pagal brėžinio duomenis raskite užbrūkšniuotos figūros perimetrą ir plotą.



26. Kubo briauna lygi 4 cm. Raskite kubo:

a) visą paviršių; b) tūrį; c) šoninės sienos įstrižainę; d) įstrižainę.

27. Apskaičiuokite:

a) $-8 : \big(16 - 2(3+4)\big) + 4$; b) $63 - 7\big(-18 + 3(15 : 5)\big)$.

28. Suprastinkite reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę:

a) $(a - 2b)^2 - 4b(b - a)$, kai $a = -\frac{2}{3}$;

b) $x(4y - x) + (y - x)^2$, kai $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$.

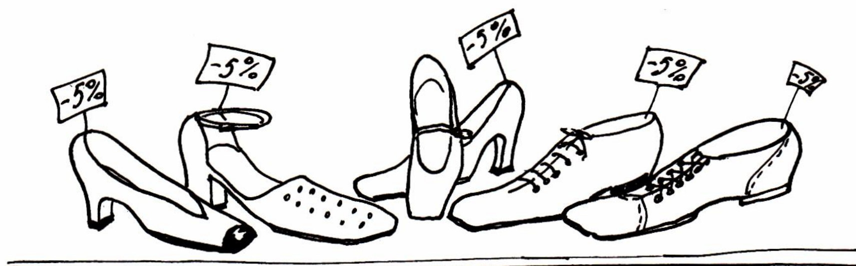
29. Išspręskite nelygybes:

a) $12 - 3(2x - 5) < 3$ b) $3{,}5 + \frac{x}{4} \geqslant 2x$

c) $(x - 1)^2 - x^2 \geqslant 4$ d) $4 + x^2 < 3x + (x - 2)^2$

30. a) Batai, kurie kainuoja 118 Lt, šią savaitę parduodami su 5% nuolaida. Už kiek litų galima nusipirkti tokius batus?

b) Jonas įsigijo batus su 5% nuolaida už 134,52 Lt. Kokia buvo batų kaina be nuolaidos?



2 KVADRATINĖ FUNKCIJA



1 Kvadratinės funkcijos apibrėžimas

Sprendžiant praktinius uždavinius, dviejų dydžių priklausomybei išreikšti nepakanka anksčiau išnagrinėtų funkcijų:

$$f(x) = kx, \quad f(x) = kx + b, \quad f(x) = \frac{k}{x}.$$

Toliau nagrinėsime funkcijas, kurios gali būti užrašomos formule

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1 PAVYZDYS. Remiantis iš fizikos žinoma laisvojo kritimo kelio formule

$$s = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{čia } g \text{ — laisvojo kritimo pagreitis.}$$

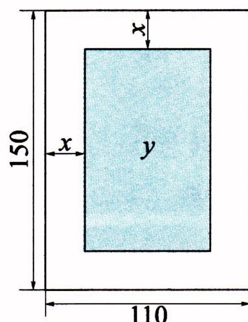
galima apytiksliai nustatyti, pavyzdžiui, tuščio šulinio gylį, išmatavus laiką (sekundėmis), per kurį akmuo nukrenta iki dugno. Akmens kritimo laiką sekundėmis pažymėkime x, šulinio gylį metrais — y, o laisvojo kritimo pagreitį g imkime lygų $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Tada formulė šulinio gyliui apskaičiuoti bus tokia:

$$y = 5x^2 \quad (x > 0).$$

Gylis y yra laiko x funkcija: $y = 5x^2$, $x > 0$.

? Koks šulinio gylis, jei akmuo krito 3 sekundes?

2 PAVYZDYS. Aptvertame stačiakampiame 150 m ilgio ir 110 m pločio sklype užsėta veja, kurios kraštai vienodai nutolę nuo tvoros atstumu x. Parašykime vejos ploto y priklausomybę nuo x formule.



Vejos plotis yra $(110 - 2x)$ m, ilgis — $(150 - 2x)$ m. Vejos plotas:

$$\begin{aligned} y &= (110 - 2x)(150 - 2x) = \\ &= 16\,500 - 300x - 220x + 4x^2 = \\ &= 16\,500 - 520x + 4x^2, \end{aligned}$$

$$y = 4x^2 - 520x + 16\,500 \quad (0 < x < 55).$$

Plotas y yra atstumo x funkcija: $y = 4x^2 - 520x + 16\,500$, $0 < x < 55$.

? Koks vejos plotas, jei jos kraštai nuo tvoros nutolę 20 metrų?

Išnagrinėtuose pavyzdžiuose turėjome atskirus kvadratinių funkcijų atvejus.

Funkcija, kurią galima užrašyti formule $f(x) = ax^2 + bx + c$ (čia x — nepriklausomas kintamasis, o a, b, c — skaičiai, $a \neq 0$), vadinama kvadratine funkcija.

? Kam lygios pavyzdžiuose gautų funkcijų koeficientų a, b ir c reikšmės?

Reiškinys $ax^2 + bx + c$ turi prasmę su visomis kintamojo x reikšmėmis, todėl kvadratinės funkcijos apibrėžimo sritis yra *visų realiųjų skaičių aibė*. Atsižvelgiant į konkretaus uždavinio sąlygą, apibrėžimo sritis gali būti siauresnė. Pavyzdžiui, pirmame pavyzdyje akmens kritimo laikas yra teigiamas skaičius, todėl $x > 0$.

? Kodėl antrame pavyzdyje x turi būti mažesnis už 55?

Pratimai ir uždaviniai

133. Pasakykite, ar funkcija yra kvadratinė:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ b) $f(x) = 2x + 2^2$

c) $f(x) = -4 + x^2$ d) $f(x) = \frac{3}{4x^2}$

e) $f(x) = \frac{7x^2+4x}{3}$ f) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

134. Pasakykite, kokios yra kvadratinių funkcijų $f(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientų a, b ir c reikšmes:

a) $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = 8x^2 - 2x$

c) $f(x) = 1 - 4x^2$ d) $f(x) = \frac{2x^2+9x-6}{3}$

135. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + bx + c$, kurios koeficientai būtų:

a) $a = 4$, $b = -2$, $c = 7$ b) $a = 2$, $c = -6$, $b = 4$

c) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 5$, $c = 0$ d) $c = 0$, $a = 1$, $b = 0$

136. Duota funkcija $f(x) = x^2$. Apskaičiuokite:

a) $f(3)$ b) $f(1)$ c) $f(-6)$ d) $f(4)$

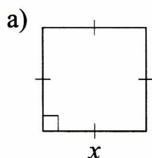
e) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ f) $f(a)$ g) $f(2a)$ h) $f(2-a)$

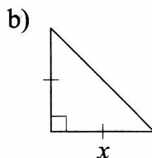
137. Duota funkcija $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Apskaičiuokite:

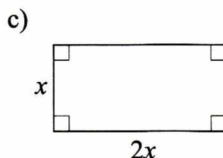
a) $f(1)$ b) $f(-1)$ c) $f(-3)$ d) $f(-1-a)$
e) $f(a-1)$ f) $f(b-2)$ g) $f(x-3)$ h) $f(-b)$

Įsitikinkite, kad **138–142** uždaviniuose dviejų dydžių priklausomybė yra kvadratinė funkcija, užrašykite ją, nurodykite nepriklausomą kintamąjį ir koeficientų a, b ir c reikšmes.

138. Užrašykite nubraižytų figūrų plotų formules, plotą pažymėję y.

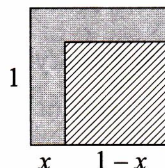
a) 

b) 

c) 

139. Praktinė taisyklė, pagal kurią galima apskaičiuoti lengvosios mašinos stabdymo kelią (metrais), važiuojant greičiu v (kilometrais per valandą), yra tokia: greičio kvadratas padalijamas iš 200 ir prie rezultato pridedamas penktadalis greičio.
Užrašykite stabdymo kelio s priklausomybę nuo greičio v.

140. Nuo vienetinio kvadrato nukerpamos dvi pločio x juostelės. Koks likusio kvadrato plotas?



141. Trikampio aukštinė 3 cm ilgesnė už kraštinę, į kurią ji yra nubrėžta. Pažymėkite šią trikampio kraštinę x ir užrašykite tokio trikampio ploto formulę.

142. Viena stačiakampio kraštinė sudaro trečdalį viso stačiakampio perimetro. Parašykite formulę, išreiškiančią stačiakampio plotą S jo perimetru P.

143. Akmuo, krisdamas žemyn, per t sekundžių nukrenta s metrų. Kritimo kelią apskaičiuojame pagal formulę $s = \frac{gt^2}{2}$, $g \approx 10\,\text{m/s}^2$. Po kiek laiko akmuo nukris ant žemės, jeigu dabar jis yra 560 m aukštyje?

144. Kūno kinetinę energiją E galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$E = \frac{mv^2}{2},$$ čia m — kūno masė, v — kūno greitis.

a) Sviedžiamas kamuoliukas, kurio masė 200 g. Užrašykite formule, kaip kamuoliuko kinetinė energija priklauso nuo metimo greičio. Kokia tai funkcija? Nurodykite koeficiento reikšmę.

b) Stepas bėga sprinto varžybose. Formule užrašykite Stepo kinetinės energijos priklausomybę nuo greičio, jei Stepas sveria 54 kg. Kokia tai funkcija? Nurodykite koeficiento reikšmę.
c) Uodas sveria $0,1$ g. Formule užrašykite skrendančio uodo kinetinės energijos priklausomybę nuo skridimo greičio. Raskite uodo kinetinę energiją, kai uodas skrenda 1 m/s greičiu.

145. Lygiakraščio trikampio kraštinė yra x. Užrašykite trikampio ploto priklausomybės nuo kraštinės ilgio formulę. Kokia tai funkcija?

146. Ritinio pagrindo spindulys yra x, o aukštinė — 5. Užrašykite ritinio tūrio priklausomybės nuo spindulio formulę.

147. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 0,6 m, o šoninė kraštinė — 0,5 m. Raskite:
a) aukštinę, nubrėžtą į pagrindą;
b) trikampio plotą;
c) aukštinę, nubrėžtą į šoninę kraštinę;
d) trikampio aukštinių santykį;
e) kiek procentų pagrindo sudaro trikampio šoninė kraštinė;
f) kiek procentų šoninės kraštinės sudaro trikampio pagrindas.

148. Kokio didumo kampą (imame kampą, mažesnį už $180°$) sudaro laikrodžio valandinė ir minutinė rodyklės, kai laikrodis rodo lygiai:
a) 1 val.; b) 3 val.; c) 16 val.; d) 11 val. 30 min.?

149. Apskaičiuokite:

a) $12\frac{7}{11} + \left(4\frac{4}{11} - 2\frac{2}{7}\right)$; b) $\left(3\frac{12}{17} + 4\frac{8}{21}\right) - 2\frac{12}{17}$.

150. Agnė perskaitė 3 kartus mažiau puslapių, negu jai liko skaityti. Kiek puslapių Agnei liko skaityti, jei knygoje yra 172 puslapiai?

151. Kiek sveikųjų sprendinių turi nelygybė $|y| \leqslant 72$?

A 145 **B** 144 **C** 142 **D** 72 **E** 71

152. Kuris skaičius didesnis:

a) 10 ar $2\sqrt{30}$; b) $5\sqrt{2}$ ar 7?

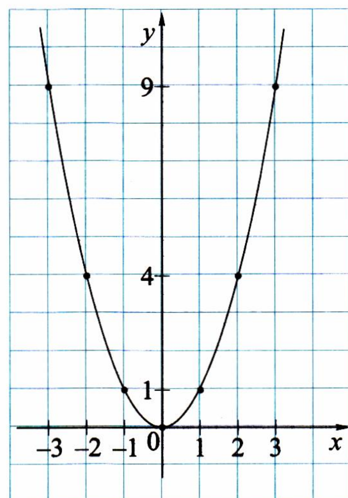
153. Valstietė atnešė į turgų kiaušinių. Pirmam pirkėjui ji pardavė pusę visų kiaušinių ir dar vieną kiaušinį. Antras pirkėjas iš jos nupirko pusę likusių kiaušinių ir dar vieną kiaušinį. Trečias taip pat paėmė pusę to, kas buvo likę, ir dar vieną kiaušinį. Tada valstietei dar liko 10 kiaušinių.
a) Kiek kiaušinių valstietė atnešė į turgų?
b) Kiek kiaušinių pirko kiekvienas pirkėjas?

2 Funkcija $f(x) = ax^2$

Funkcija $f(x) = ax^2$ yra atskiras kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ atvejis, kai $b = c = 0$. Tokį pavidalą turi funkcijos: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$ ir pan. Nubraižykime funkcijos $f(x) = x^2$ grafiką.
Sudarykime funkcijos reikšmių lentelę.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Koordinačių plokštumoje pažymėkime taškus, kurių koordinatės nurodytos lentelėje, ir per juos glodžiai brėžkime kreivę. Kuo daugiau taškų pažymėtume, tuo tikslesnė būtų kreivė. Gautoji kreivė vadinama *parabole*. Parabolė turi dvi šakas. Nubrėžtos parabolės šakos simetriškos ordinačių ašies atžvilgiu, nes su priešingomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės lygios, pavyzdžiui, $f(-1) = f(1) = 1$, $f(-2) = f(2) = 4$, $f(-3) = f(3) = 9$.
Kai $x = 0$, funkcija įgyja mažiausią reikšmę, lygią 0. Didžiausios reikšmės funkcija neturi. Parabolės ir jos simetrijos ašies susikirtimo taškas vadinamas *parabolės viršūne*. Šiuo atveju parabolės viršūnė — taškas (0; 0). Tai žemiausias grafiko taškas.



? Nurodykite funkcijos $f(x) = x^2$ apibrėžimo ir reikšmių sritis, didėjimo ir mažėjimo intervalus.

Parabole vadiname bet kurios kvadratinės funkcijos grafiką.

Užduotis. Pirmojo skyrelio 1 pavyzdyje nagrinėjome funkciją $f(x) = 5x^2$, $x > 0$. Funkcijos reikšmės reiškė šulinio gylį, o x — akmens kritimo laiką. Laiko reikšmės buvo teigiami skaičiai, todėl $f(x)$ grafikas — viena parabolės šaka. Nubraižykite ją.

Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykime grafikus kvadratinių funkcijų $f(x) = ax^2$, kurių koeficientas a yra teigiamas skaičius ($a > 0$), pavyzdžiui: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$.

$y = x^2$

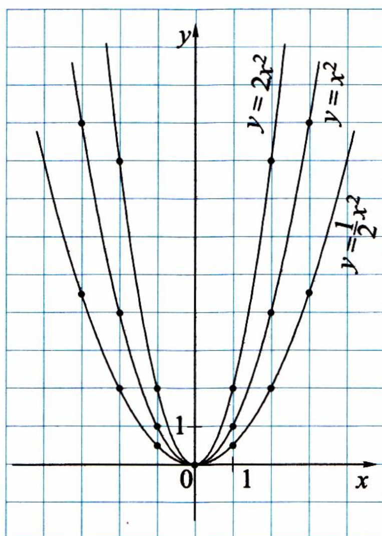
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

$y = 2x^2$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	18	8	2	0	2	8	18	...

$y = \frac{1}{2}x^2$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	...



Matome, kad visų nubraižytų parabolių šakos nukreiptos aukštyn. Kuo koeficiento a reikšmė yra didesnė, tuo glaustesnės parabolės šakos, t. y. tuo jos yra arčiau y ašies.

Visų nubraižytų parabolių viršūnės yra tame pačiame taške (0; 0).

Visos nubraižytos parabolės yra simetriškos y ašies atžvilgiu.

Nubraižykime grafikus funkcijų $f(x) = ax^2$, kurių koeficientas a yra neigiamas skaičius ($a < 0$), pavyzdžiui: $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

$y = -x^2$

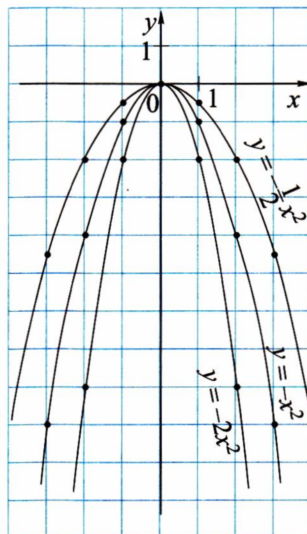
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

$y = -2x^2$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-18	-8	-2	0	-2	-4	-18	...

$y = -\frac{1}{2}x^2$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$-4{,}5$	-2	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	-2	$-4{,}5$	...

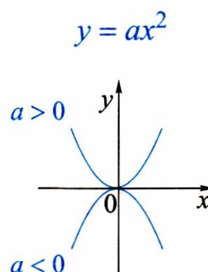


Matome, kad kiekvienos šių parabolių šakos nukreiptos žemyn, viršūnės koordinatės — (0; 0), simetrijos ašis — y ašis.

? Nurodykite funkcijų $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$ apibrėžimo ir reikšmių sritis, didėjimo ir mažėjimo intervalus. Kaip nuo koeficiento a dydžio ($a < 0$) priklauso parabolės šakų padėtis y ašies atžvilgiu?

Funkcijų $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ ir $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$ grafikai yra simetriški funkcijų $y = x^2$, $y = 2x^2$ ir $y = \frac{1}{2}x^2$ grafikams x ašies atžvilgiu.

Parabolės $y = ax^2$ šakos eina aukštyn, kai $a > 0$; eina žemyn, kai $a < 0$. Parabolė simetriška ordinačių ašies atžvilgiu, jos viršūnė yra taške (0; 0). Kai $a > 0$, tai parabolės viršūnės taške funkcija įgyja mažiausiąją reikšmę, kai $a < 0$ — didžiausiąją reikšmę.



Pratimai ir uždaviniai

154. Nurodykite kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2$ koeficiento a reikšmę:

a) $f(x) = 4x^2$ b) $f(x) = -7x^2$ c) $f(x) = -\frac{x^2}{6}$

d) $f(x) = 1{,}13x^2$ e) $f(x) = \frac{19x^2}{3}$ f) $f(x) = -\frac{3x^2}{13}$

155. Duota funkcija $f(x) = 2x^2$. Raskite:

a) $f(1)$; b) $f(3)$; c) $f(-0{,}5)$; d) $f\left(\frac{3}{4}\right)$; *e) $f(a)$; *f) $f(3a)$.

156. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$, kai $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ grafiką. Raskite:

a) y reikšmę, kai $x = -3$; 2,5;
b) x reikšmę, kai $y = 3$; 4,5;
c) funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus;
d) didžiausią arba mažiausią funkcijos reikšmę.

157. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$, kai $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ grafiką. Raskite:

a) y reikšmę, kai $x = -1{,}5$; 3;
b) x reikšmę, kai $y = -5$; -1;
c) funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus;
d) didžiausią arba mažiausią funkcijos reikšmę.

158. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2$, $g(x) = \frac{1}{5}x^2$

c) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 4x^2$ d) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2$

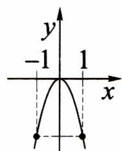
159. Nebraižydami pasakykite, kokią tarpusavio padėtį koordinačių plokštumoje užims funkcijų grafikai:

a) $f(x) = 7x^2$ ir $g(x) = -7x^2$;
b) $f(x) = 13x^2$ ir $g(x) = -13x^2$;
c) $f(x) = -3{,}5x^2$ ir $g(x) = 3{,}5x^2$.

160. Nubraižykite scheminį funkcijos grafiką:

a) $f(x) = -2{,}3x^2$; b) $f(x) = 9x^2$; c) $f(x) = -13{,}7x^2$.

Pavyzdys. Nubraižykime scheminį funkcijos $y = -2{,}5x^2$ grafiką. Kadangi funkcija yra pavidalo $f(x) = ax^2$ ir $a < 0$, tai jos grafikas yra parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, o viršūnė yra koordinačių pradžios taške. Paėmę, pavyzdžiui, x reikšmę lygią 1, randame $y = -2{,}5$. Pažymėję tašką $(1; -2{,}5)$ ir jam simetrišką y ašies atžvilgiu tašką $(-1; -2{,}5)$, jau galime per tris taškus apytiksliai nubrėžti parabolę.



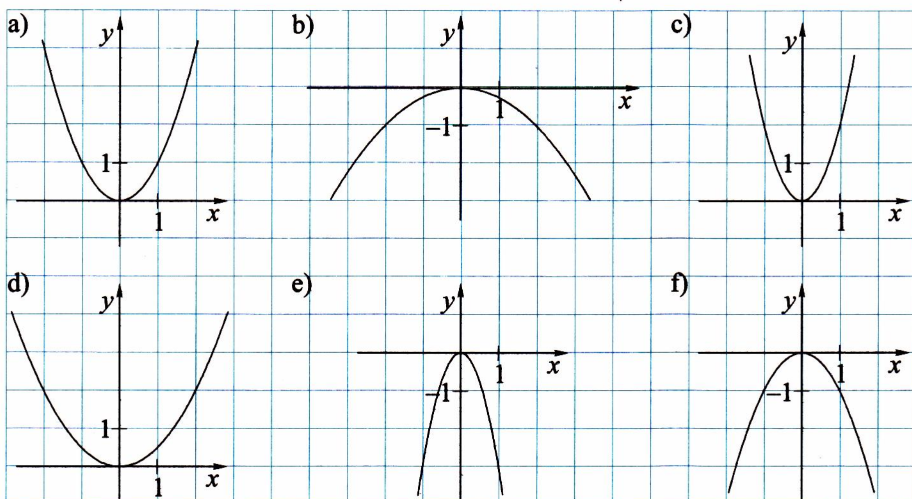
---

161. Koks yra koeficiento a ženklas, jeigu funkcijos $f(x) = ax^2$ grafikas yra:
a) pirmame ir antrame koordinačių plokštumos ketvirčiuose;
b) trečiame ir ketvirtame koordinačių plokštumos ketvirčiuose?

162. Ar priklauso funkcijos $f(x) = -25x^2$ grafikui taškai:

a) $A(-2; -100)$; b) $B(2; 100)$; c) $C\left(\frac{1}{5}; -1\right)$; d) $D\left(-\frac{2}{5}; -4\right)$?

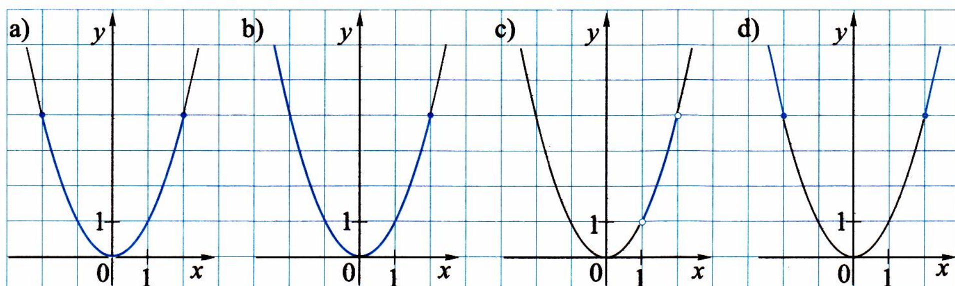
163. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2$, kurios grafikas būtų nubraižytoji parabolė:



164. Raskite koeficiento a reikšmę, jeigu žinoma, kad funkcijos $f(x) = ax^2$ grafikas eina per tašką:

a) $A(3; 45)$; b) $B(-2; 16)$; c) $C(-1; -6)$; d) $D(1; 7)$.

165. Nurodykite argumento reikšmių intervalą (arba intervalus), atitinkančius nuspalvintą funkcijos $f(x) = x^2$ grafiko dalį. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmę tame intervale.



166. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite abiejų funkcijų grafikus ir raskite grafikų susikirtimo taškų koordinates:

a) $y = x^2$, $y = x$ b) $y = 2x^2$, $y = -x + 2$

c) $y = x^2$, $y = \frac{8}{x}$ d) $y = -2x^2$, $y = -\frac{4}{x}$

167. Vėjo slėgį į jo krypčiai statmeną sieną apytiksliai galima apskaičiuoti pagal formulę $p = 0,1v^2$, čia p — vėjo slėgis kG/m^2, v — vėjo greitis metrais per sekundę.

a) Nubraižykite grafiką, vaizduojantį vėjo slėgį į sieną kintant vėjo greičiui.

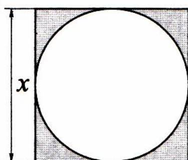
b) Naudodamiesi grafiku raskite vėjo slėgį į sieną, kai vėjo greitis yra 2 m/s; 3 m/s; 5 m/s; 8 m/s; 12 m/s.

c) Naudodamiesi grafiku raskite, kokiam vėjo greičiui esant slėgis į sieną bus 4 kG/m^2; 6 kG/m^2; 10 kG/m^2.

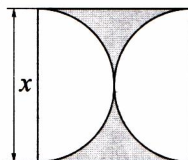
168. Formule užrašykite kubo paviršiaus ploto S priklausomybę nuo kubo briaunos ilgio x.

169. Užrašykite nuspalvintosios kvadrato dalies ploto priklausomybę nuo kvadrato kraštinės ilgio x. Kokia tai funkcija? Nubraižykite scheminį jos grafiką.

a)



b)



170. Koordinačių plokštumoje pažymėkite tašką, simetrišką taškui $A(-3; 5)$:

a) abscisių ašies atžvilgiu;

b) ordinačių ašies atžvilgiu;

c) koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

171. Stačiosios trapecijos trumpesnysis pagrindas lygus 6 cm, o šoninės kraštinės — 4 cm ir 5 cm. Raskite šios trapecijos:

a) ilgesnįjį pagrindą; b) perimetrą; c) plotą; d) įstrižainių ilgius.

172. Kurią $1\frac{1}{3}$ valandos dalį sudaro $\frac{1}{3}$ minutės?

A $\frac{1}{270}$ **B** $\frac{1}{180}$ **C** $\frac{1}{60}$ **D** $\frac{1}{20}$ **E** $\frac{1}{240}$

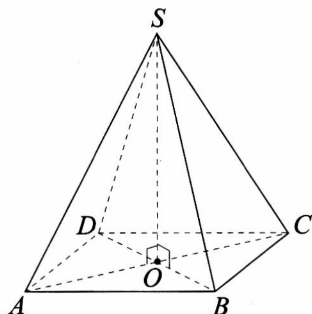
173. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{x}{2} + 3\frac{3}{14} = -1\frac{4}{21}$; b) $3y + 24 = -95,4$.

174. Palyginkite reiškinius:

a) $(c+2)(c+4)$ ir $(c+3)^2$;
b) $(a-1)(a-3)$ ir $(a-2)^2$.

175. Duota: $SABCD$ — piramidė, $AB = BC = 4\,\text{cm}$,
$SO \perp AC$, $SO \perp BD$, $AB \perp BC$,
$SA = SC = 6\,\text{cm}$.
Apskaičiuokite: AC; SO; $S_{\triangle ACS}$.



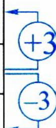
176. Dėžėje yra 24 kg vinių. Kaip be svarsčių lėkštinėmis svarstyklėmis atsverti 9 kg vinių?

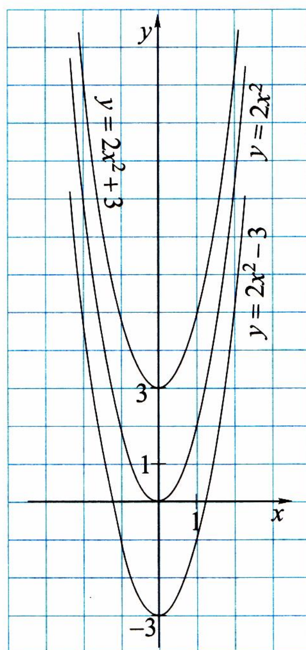


3 Funkcija $f(x) = ax^2 + c$

Funkcija $f(x) = ax^2+c$ yra atskiras kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2+bx+c$ atvejis, kai $b = 0$, $c \neq 0$. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykime funkcijų $f(x) = 2x^2 + 3$, $g(x) = 2x^2 - 3$ ir $h(x) = 2x^2$ grafikus.
Sudarykime funkcijų reikšmių lentelę.

x	...	−2	−1	0	1	2	...
$y = 2x^2 + 3$	...	11	5	3	5	11	...
$y = 2x^2$	...	8	2	0	2	8	...
$y = 2x^2 - 3$	...	5	−1	−3	−1	5	...



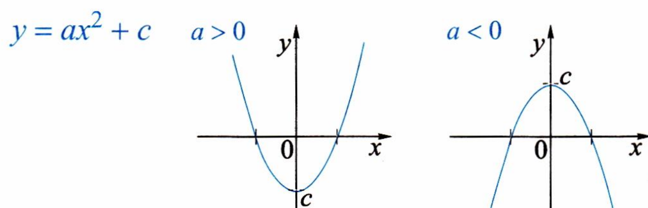


Matome, kad kiekviena funkcijos $f(x) = 2x^2+3$ reikšmė 3 vienetais didesnė už atitinkamą funkcijos $h(x) = 2x^2$ reikšmę, o kiekviena funkcijos $g(x) = 2x^2 - 3$ reikšmė 3 vienetais mažesnė už atitinkamą funkcijos $h(x) = 2x^2$ reikšmę.
Vadinasi, funkcijos $f(x) = 2x^2 + 3$ grafiką galima gauti iš funkcijos $h(x) = 2x^2$ grafiko, pastūmus jį 3 vienetais teigiamąja y ašies kryptimi (aukštyn). Funkcijos $g(x) = 2x^2 - 3$ grafiką galima gauti iš funkcijos $h(x) = 2x^2$ grafiko, pastūmus jį 3 vienetais neigiamąja y ašies kryptimi (žemyn). Gausime tos pačios formos parabolę su ta pačia simetrijos ašimi. Parabolės $y = 2x^2 + 3$ simetrijos ašis yra y ašis, o viršūnė yra taške (0; 3).
Parabolės $y = 2x^2 - 3$ simetrijos ašis — taip pat y ašis, o viršūnė yra taške (0; −3).

? Remdamiesi grafikais nurodykite funkcijų $f(x) = 2x + 3$ ir $g(x) = 2x - 3$ didėjimo ir mažėjimo intervalus. Ką galima pasakyti apie didžiausiąją ir mažiausiąją funkcijų reikšmes?

1 užduotis. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = -2x^2 + 3$, $g(x) = -2x^2 - 3$ ir $h(x) = -2x^2$ grafikus.

Parabolės $y = ax^2 + c$ šakos eina aukštyn, kai $a > 0$; eina žemyn, kai $a < 0$. Parabolė simetriška ordinačių ašies atžvilgiu, jos viršūnė yra taške $(0; c)$.



Parabolė $y = ax^2 + c$ gaunama pastūmus parabolę $y = ax^2$ atstumu c aukštyn, kai $c > 0$, arba atstumu $|c|$ žemyn, kai $c < 0$.

2 užduotis.

1) Pasidarykite parabolių $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x^2$ šablonus.

2) Naudodamiesi parabolės $y = x^2$ šablonu, nubraižykite paraboles $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + 2$ ir $y = -x^2 - 2$.

Pratimai ir uždaviniai

177. Duota funkcija $f(x) = 2 - 5x^2$. Ar teisinga lygybė:

a) $f(-2) = -18$ b) $f(3) = 43$

c) $f\left(-\frac{2}{5}\right) = 1\frac{1}{5}$ d) $f\left(\sqrt{2}\right) - f\left(\sqrt{3}\right) = 5$?

178. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus funkcijų $y = g(x)$ ir $y = f(x)$, kai:

a) $g(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 4$;
b) $g(x) = 2x^2$, $f(x) = 2x^2 - 1$;
c) $g(x) = -x^2$, $f(x) = -x^2 - 2$;
d) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

179. Kuriuose koordinačių ketvirčiuose yra funkcijos grafikas:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$;
b) $f(x) = -2x^2 - 2$;
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$?

180. Užrašykite funkciją $y = f(x)$, kurios grafikas yra parabolė:

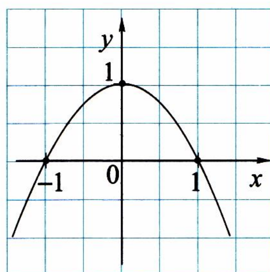
a) $y = 2x^2$, pastumta 3 vienetais aukštyn;

b) $y = -2x^2$, pastumta 1,75 vieneto žemyn;

c) $y = \frac{1}{2}x^2$, pastumta 4 vienetais aukštyn.

181. Kurios funkcijos grafikas atitinka brėžinį?

A $f(x) = x^2 + 1$
B $f(x) = -x^2 + 1$
C $f(x) = -x^2 - 1$
D $f(x) = x^2 - 1$



182*. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = -2x^2 + 5$;

b) $f(x) = 3x^2 + 4$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7$;

d) $f(x) = -5x^2 + 13$.

183. Naudodamiesi parabolės $y = 2x^2$ šablonu, nubraižykite parabolę $y = 4 - 2x^2$. Nurodykite:

a) parabolės simetrijos ašį ir viršūnės koordinates;

b) funkcijos $f(x) = 4 - 2x^2$ didėjimo ir mažėjimo intervalus;

c) didžiausią arba mažiausią funkcijos reikšmę.

184. Naudodamiesi parabolės $y = \frac{1}{2}x^2$ šablonu, nubraižykite parabolę $y = -2 + \frac{1}{2}x^2$. Nurodykite:

a) parabolės viršūnės koordinates;

b) funkcijos $f(x) = -2 + \frac{1}{2}x^2$ didėjimo ir mažėjimo intervalus;

*c) didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmę intervale [1; 4].

185. Nubraižykite scheminį funkcijos grafiką:

a) $f(x) = -3x^2 + 4$;

b) $f(x) = 17x^2 + 2$;

c) $f(x) = 0{,}2x^2 - 3$;

d) $f(x) = -0{,}7x^2 - 16$.

186. Raskite grafikų sankirtos taškų koordinates:

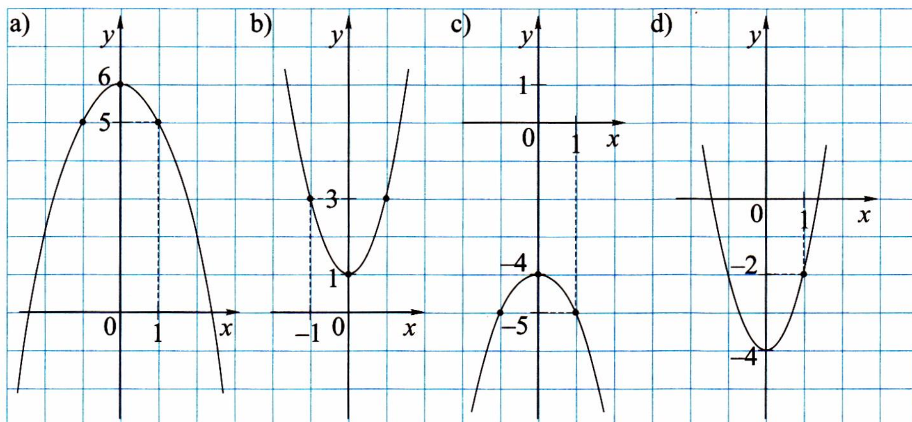
a) $f(x) = -x^2 + 2$ ir $g(x) = -x$;

b) $f(x) = 2x^2 - 2$ ir $g(x) = x$;

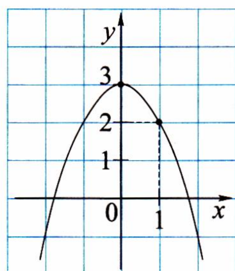
c) $f(x) = x^2 - 4$ ir $g(x) = -3x$;

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ ir $g(x) = 1$.

187. Užrašykite funkciją, kurios grafikas yra nubraižytoji parabolė:



Pavyzdys. Užrašykite funkciją, kurios grafikas yra nubraižytoji parabolė:



Sprendimas.

1) Kadangi parabolė yra simetriška y ašies atžvilgiu, o viršūnė yra y ašies taške (0; 3), tai ji yra funkcijos $f(x) = ax^2 + 3$ grafikas.

2) Taškas (1; 2) priklauso grafikui, todėl teisinga lygybė: $2 = a \cdot 1^2 + 3$. Vadinasi, $a = -1$, taigi $f(x) = -x^2 + 3$.

Atsakymas. $f(x) = -x^2 + 3$.

188. Ar priklauso funkcijos $f(x) = x^2 + 3$ grafikui taškai:

a) $(-1; 4)$; b) $(-2; -1)$; c) $(1; 4)$; d) $(-1{,}5; 0{,}75)$?

189. Raskite koeficientų a ir c reikšmes, jei funkcijos $f(x) = ax^2 + c$ grafikas kerta koordinačių ašis taškuose:

a) $(0; 6)$ ir $(2; 0)$

b) $(-2; 0)$ ir $(0; 6)$

c) $\left(-2\frac{1}{3}; 0\right)$ ir $(0; -7)$

d) $(0; 9)$ ir $(-1{,}5; 0)$

Pavyzdys. *Sprendimas.* a) Į lygtį $y = ax^2 + c$ įrašę taško $(0; 6)$ koordinates, rasime c reikšmę: $6 = a \cdot 0^2 + c$; $c = 6$, o $y = ax^2 + 6$. Į gautą lygtį įrašę antrojo taško $(2; 0)$ koordinates, gausime a reikšmę: $0 = a \cdot 2^2 + 6$; $a = -\frac{3}{2}$.
Atsakymas. $a = -\frac{3}{2}$, $c = 6$.

---

190. Į kalnų turistų stovyklavietę iš malūnsparnio, esančio 180 m aukštyje, metamas maišas su medikamentais ir maistu. Nustatykite, kokiame aukštyje h maišas bus įvairiais kritimo momentais, jeigu žinoma, kad $h = 180 - \frac{gt^2}{2}$, kur h — ieškomas aukštis metrais, $g \approx 10\,\text{m/s}^2$, t — kritimo laikas sekundėmis.

a) Užpildykite lentelę.

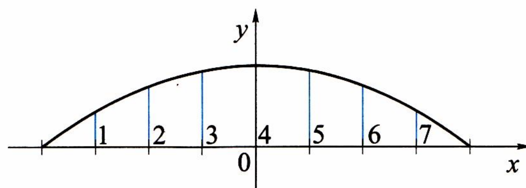
t	0	1	2	3	4	5	6
h							

b) Nubraižykite priklausomybės h nuo t scheminį grafiką.

c) Remdamiesi grafiku nustatykite, kada maišas nukris.

d) Remdamiesi grafiku nustatykite, po kelių sekundžių maišas bus 120 m aukštyje.

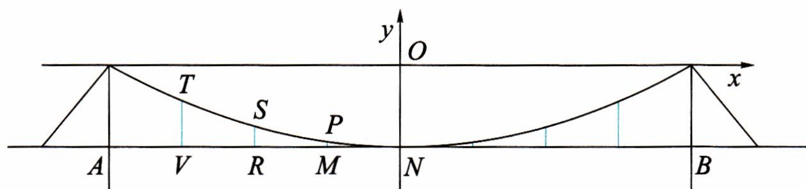
191. Tilto arka yra parabolės formos. Arka turi 7 vertikalias atramas, pastatytas taškuose, kurie dalija tilto ilgį į lygias dalis. Tilto ilgis yra 96 m, o arkos aukštis — 12 m.



a) Sudarykite kvadratinę funkciją, kurios grafikas būtų pavaizduota parabolė.

b) Raskite atramų ilgius.

192. Kabančio tilto lynas yra parabolės formos. Tilto ilgis $AB = 40\,\text{m}$, o lyno įlinkis $ON = 25\,\text{m}$.



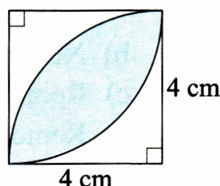
a) Sudarykite funkciją, kurios grafikas būtų pavaizduota parabolė.
b) Tiltą palaiko 6 vertikalūs papildomi lynai. Raskite MP, RS ir VT ilgius, jeigu $NM = MR = RV = 5\,\text{m}$.

193. Nuspalvinkite koordinačių plokštumos taškus, kurių koordinatės tenkina sąlygą:

a) $y = 2$	b) $x = -2$	c) $y > 2$	d) $x < -2$
*e) $\lvert x\rvert = 3$	f) $\lvert x\rvert \leqslant 3$	*g) $\lvert y\rvert \geqslant 3$	*h) $\lvert x\rvert < 4$

194. Stačiakampio plotas $6\,\text{cm}^2$ didesnis už kvadrato plotą. Viena stačiakampio kraštinė 2 cm ilgesnė už kvadrato kraštinę, o kita jai lygi.
a) Raskite kvadrato kraštinės ilgį.
b) Apskaičiuokite kvadrato perimetrą.
c) Raskite stačiakampio plotą.
*d) Raskite kvadrato ir stačiakampio įstrižainių santykį.

195. Pagal paveikslo duomenis raskite nuspalvintos figūros, apribotos apskritimų lankais:
a) perimetrą;
b) plotą.



196. Kam lygi reiškinio $3b^2 - a^2$ reikšmė, jeigu $a = -2$, $b = -3$?

A -23 **B** -31 **C** 31 **D** 23 **E** 14

197. Suprastinkite reiškinį:
a) $3{,}4a^{-8}b^{10} \cdot 5a^5b^{-9}$; b) $\left(\frac{5x^{-4}}{2y^{-5}}\right)^{-2} \cdot 4x^{-5}y^6$.

198. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $x^3 - 4x$	b) $4a^2 - 8ab + 4b^2$
c) $cm - cn + 5m - 5n$	*d) $x^2 - 5x + 6$

199. Trys ančiukai ir keturi žąsiukai sveria 2,5 kg, o keturi ančiukai ir trys žąsiukai — 2,4 kg. Kiek sveria vienas ančiukas ir vienas žąsiukas?

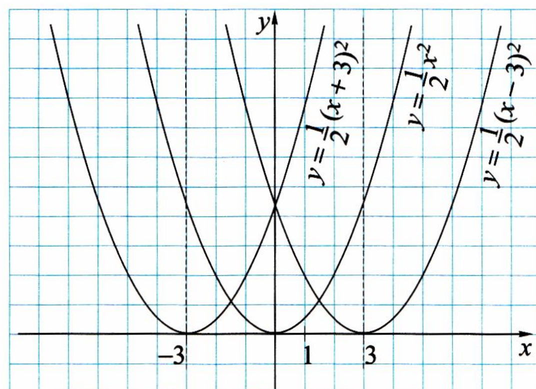
4 Funkcijos $f(x) = a(x+m)^2$ ir $g(x) = a(x+m)^2 + n$

Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykime funkcijų $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ ir $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$ grafikus.

Sudarykime reikšmių lentelę.

x	...	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	...
$g(x)$	...	32	24,5	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	...
$f(x)$	...	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	...
$h(x)$	...	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32	...

Matome, kad funkcijos įgyja tas pačias reikšmes, tik su skirtingomis argumento reikšmėmis. Lentelėje funkcijos $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ reikšmės palyginti su funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ reikšmėmis yra pastumtos į dešinę per 3 vienetus, o funkcijos $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$ – į kairę per 3 vienetus.



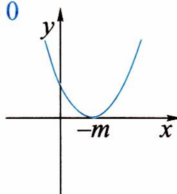
Vadinasi, funkcijos $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ grafiką į dešinę (teigiamąja x ašies kryptimi) per 3 vienetus. Funkcijos $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ grafiką į kairę (neigiamąja x ašies kryptimi) per 3 vienetus.

? Nurodykite parabolių $y = \frac{1}{2}(x-3)^2$ ir $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ simetrijos ašis ir viršūnių koordinates.

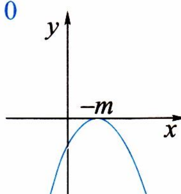
1 užduotis. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2$ ir $h(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2$ grafikus.

Parabolės $y = a(x+m)^2$ šakos eina aukštyn, kai $a > 0$; eina žemyn, kai $a < 0$. Parabolė simetriška tiesės $x = -m$ atžvilgiu, jos viršūnė yra taške $(-m; 0)$.

$y = a(x+m)^2$ $a > 0$



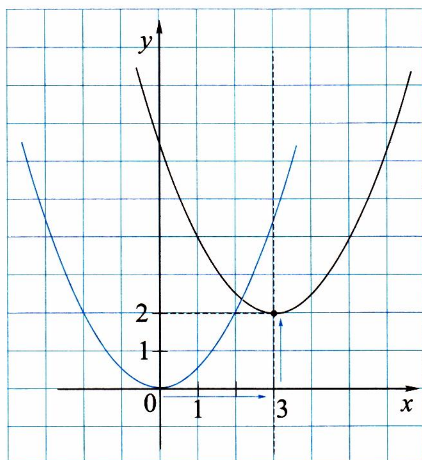
$a < 0$



Parabolė $y = a(x+m)^2$ gaunama pastūmus parabolę $y = ax^2$ atstumu m į kairę, kai $m > 0$, arba atstumu $|m|$ į dešinę, kai $m < 0$.

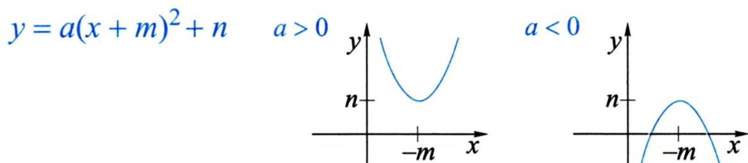
Nubraižykime funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ grafiką.

Pastūmę parabolę $y = \frac{1}{2}x^2$ per 3 vienetus į dešinę, gauname funkcijos $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ grafiką, o šį pastūmę per 2 vienetus aukštyn, gauname funkcijos $y = f(x)$ grafiką.



2 užduotis. Nubraižykite funkcijos $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ grafiką.

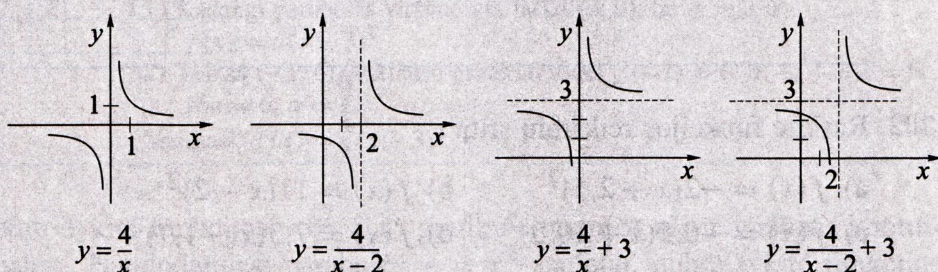
Parabolės $y = a(x + m)^2 + n$ šakos eina aukštyn, kai $a > 0$; eina žemyn, kai $a < 0$. Parabolė simetriška tiesės $x = -m$ atžvilgiu, jos viršūnė yra taške $(-m; n)$.



Parabolė $y = a(x+m)^2+n$ gaunama pastūmus parabolę $y = ax^2$ atstumu m į kairę, kai $m > 0$, arba atstumu $|m|$ į dešinę, kai $m < 0$, po to atstumu n aukštyn, kai $n > 0$, arba atstumu $|n|$ žemyn, kai $n < 0$.

? Kuo skiriasi funkcijų $f(x) = a(x + m)^2$ ir $g(x) = a(x + m)^2 + n$ grafikai ir jų braižymo eiga?

Panašiai galima samprotauti ir braižant kitų funkcijų grafikus. Pavyzdžiui, naudodamiesi funkcijos $f(x) = \frac{4}{x}$ grafiku nubraižykime funkcijų $g(x) = \frac{4}{x-2}$, $h(x) = \frac{4}{x} + 3$ ir $l(x) = \frac{4}{x-2} + 3$ grafikus.



$y = \frac{4}{x}$ $\quad y = \frac{4}{x-2}$ $\quad y = \frac{4}{x} + 3$ $\quad y = \frac{4}{x-2} + 3$

Funkcijos $f(x) = \frac{4}{x}$ grafikas yra hiperbolė. Grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Funkcijos $g(x) = \frac{4}{x-2}$ grafikas yra hiperbolė $y = \frac{4}{x}$, pastumta į dešinę per 2 vienetus. Jis yra simetriškas taško (2; 0) atžvilgiu.

Funkcijos $h(x) = \frac{4}{x} + 3$ grafikas yra hiperbolė $y = \frac{4}{x}$, pastumta aukštyn per 3 vienetus. Jis yra simetriškas taško (0; 3) atžvilgiu.

Funkcijos $l(x) = \frac{4}{x-2} + 3$ grafikas yra hiperbolė $y = \frac{4}{x}$, pastumta į dešinę per 2 vienetus ir aukštyn per 3 vienetus. Jis yra simetriškas taško (2; 3) atžvilgiu.

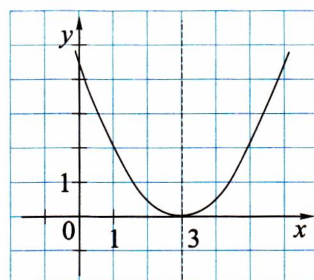
Pratimai ir uždaviniai

200. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = x^2$, $f(x) = (x+2)^2$ ir $f(x) = (x-2)^2$ grafikus.

201. Nurodykite funkcijos grafiko simetrijos ašį, viršūnės koordinates ir nubraižykite jį naudodamiesi šablonu. Remdamiesi grafiku, nurodykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus ir funkcijos reikšmių sritį.

a) $f(x) = 2(x-4)^2$ b) $f(x) = -2(x+4)^2$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$
e) $f(x) = -(x-5)^2$ f) $f(x) = (x-3)^2$

Pavyzdys. $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$.



Simetrijos ašis: tiesė $x = 3$.
Viršūnės yra taške: $(3; 0)$.
Funkcija mažėja intervale: $(-\infty; 3)$.
Funkcija didėja intervale: $(3; +\infty)$.
Funkcijos reikšmių sritis: $[0; +\infty)$.

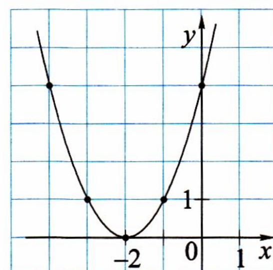
---

202. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = -2(x+2{,}5)^2$ b) $f(x) = 11(x-2)^2$
c) $f(x) = -0{,}5(x+10{,}5)^2$ d) $f(x) = 7{,}3(x-1{,}7)^2$

203. Kurios funkcijos grafikas atitinka brėžinį?

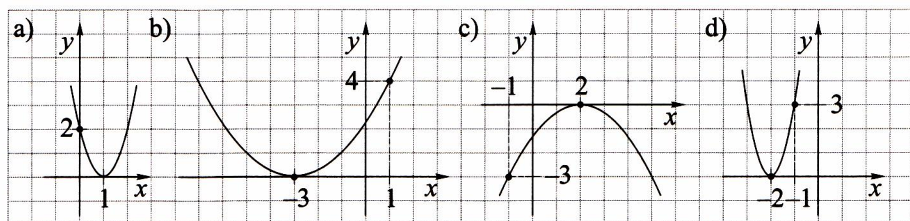
A $f(x) = x^2 - 2$
B $f(x) = -x^2 + 2$
C $f(x) = (x-2)^2$
D $f(x) = (x+2)^2$



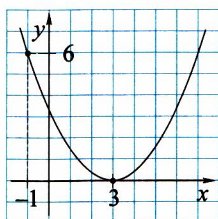
204. Nubraižykite scheminį funkcijos grafiką:

a) $f(x) = -0{,}4(x+4)^2$ b) $f(x) = -6(x-5)^2$
c) $f(x) = 2{,}13(x-2{,}7)^2$ d) $f(x) = 17(x+0{,}9)^2$

205. Užrašykite funkciją $f(x) = a(x-m)^2$, kurios grafikas atitinka nubraižytą parabolę.



Pavyzdys. Užrašykite funkciją $f(x) = a(x-m)^2$, kurios grafikas atitinka nubraižytą parabolę.



1) Kadangi parabolės viršūnė yra taške (3; 0), tai $m = 3$ ir $f(x) = a(x-3)^2$.
2) Taškas (−1; 6) priklauso grafikui, todėl $f(-1) = 6$, $a(-1-3)^2 = 6$, $16a = 6$, $a = \frac{3}{8}$.

Vadinasi, $f(x) = \frac{3}{8}(x-3)^2$.

---

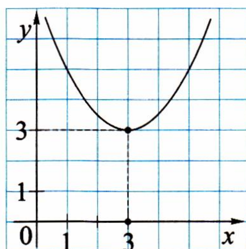
206. Nurodykite funkcijos $y = f(x)$ grafiko simetrijos ašį ir viršūnės koordinates. Naudodamiesi parabolės $y = x^2$ šablonu, nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką. Remdamiesi grafiku, nurodykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus ir funkcijos reikšmių sritį.

a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$
b) $f(x) = -(x+2)^2 + 1$
c) $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$
d) $f(x) = (x+3)^2 - 3$
e) $f(x) = -(x-4)^2 - 2$
f) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$

207. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = 2(x-4)^2 + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 11$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 5$
d) $f(x) = -(x+4)^2 + 7$
e) $f(x) = -2(x-7)^2 - 25$
f) $f(x) = (x+3)^2 - 14$

208. Kurios funkcijos grafikas atitinka brėžinį?

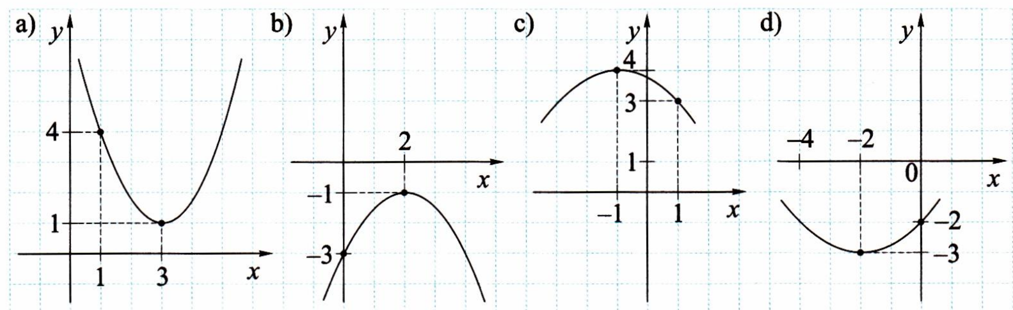


A $f(x) = -2(x-3)^2 + 3$
B $f(x) = 1{,}5(x+3)^2 + 3$
C $f(x) = 0{,}5(x-3)^2 + 3$
D $f(x) = -0{,}5(x-3)^2 - 3$

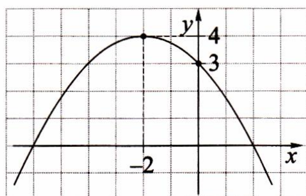
209. Nubraižykite scheminį funkcijos $y = f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = 4(x-3)^2 - 4$
b) $f(x) = -3(x-4)^2 - 3$
c) $f(x) = 3(x-7)^2 + 5$
d) $f(x) = 0{,}25(x+3{,}6)^2 + 3{,}5$
e) $f(x) = -2{,}6(x+2{,}6)^2 + 2{,}6$
f) $f(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2 - 3\frac{4}{7}$

210. Užrašykite funkciją $f(x) = a(x+m)^2 + n$, kurios grafikas atitinka nubraižytą parabolę.



Pavyzdys. Užrašykite funkciją $f(x) = a(x+m)^2 + n$, kurios grafikas atitinka nubraižytą parabolę.



1) Parabolės viršūnė yra taške $(-2; 4)$, todėl $m = -2$, $n = 4$ ir $f(x) = a(x+2)^2 + 4$.
2) Taškas $(0; 3)$ priklauso grafikui, todėl $f(0) = 3$, $a(0+2)^2 + 4 = 3$, $4a = -1$, $a = -0{,}25$.

Taigi $f(x) = -0{,}25(x+2)^2 + 4$.

211. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ b) $f(x) = \frac{2}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{2}{x-3} + 3$

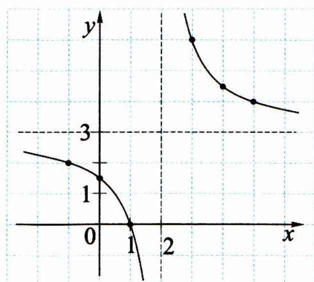
d) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 4$ e) $f(x) = \frac{3}{x-3} + 2$ f) $f(x) = -\frac{3}{x} + 2$

Pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $f(x) = \frac{3}{x-2} + 3$ grafiką.

Sprendimas.

Funkcijos $y = f(x)$ grafikas yra hiperbolė $y = \frac{3}{x}$, pastumta per 2 vienetus į dešinę ir per 3 vienetus — aukštyn.

Nubraižykime dvi punktyrines tarpusavyje statmenas tieses — pagalbines stačiakampės koordinačių sistemos ašis $y = 3$ ir $x = 2$. Nubraižykime naujojoje koordinačių sistemoje funkcijos $y = g(x)$ grafiką.

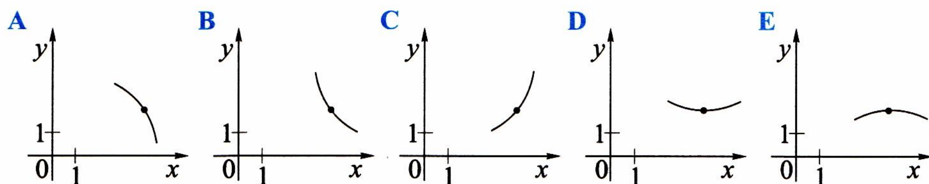


Tai ir yra funkcijos $f(x) = \frac{3}{x-2} + 3$ grafikas senojoje koordinačių sistemoje.

---

212. a) Nubraižykite funkcijos $f(x) = (x-4)^2 + 2$ grafiką.

*b) Kuris brėžinys vaizduoja dalį funkcijos $f(x) = (4-x)^2 + 2$ grafiko? Brėžinyje pažymėtas taškas yra (4; 2).



213. Užrašykite formule, kaip kubo paviršius priklauso nuo kubo briaunos ilgio x. Kokia tai funkcija? Kaip pakistų paviršiaus plotas, jei:

a) briaunos ilgį x padidintume 2 cm;

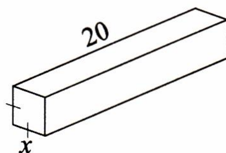
b) briaunos ilgį x sumažintume 3 cm?

214. Stačiojo lygiašonio trikampio įžambinė 2 cm ilgesnė už jo statinius. Formule užrašykite trikampio ploto priklausomybę nuo įžambinės. Kokia tai funkcija?

215. Stačiakampio gretasienio formos sijos skersinis pjūvis — kvadratas.

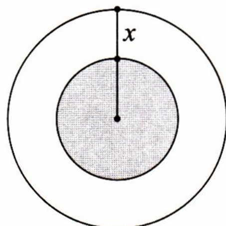
a) Formule užrašykite sijos tūrio V (cm^3) priklausomybę nuo skerspjūvio kraštinės ilgio x (cm).

b) Kokią gausite funkciją, jei skerspjūvio kraštinės padidinamos 5 cm; sumažinamos 6 cm?



216. a) Didžiojo skritulio spindulys yra 8. Užrašykite nuspalvinto skritulio ploto y priklausomybę nuo x formule.

b) Nuspalvinto skritulio spindulys yra 5. Užrašykite didžiojo skritulio ploto y priklausomybę nuo x formule. Kokią funkciją gavote?

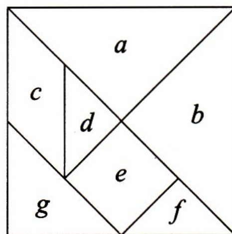


217. Lygiagretainio vienas kampas lygus 60°, o kraštinės yra 8 cm ir 14 cm. Raskite lygiagretainio:

a) kitus kampus; b) aukštines; c) plotą; d) įstrižaines.

218. Atviras indas yra stačiakampio gretasienio formos. Jo ilgis yra 25 cm, plotis — 16 cm ir aukštis — 12 cm. Apskaičiuokite indo tūrį ir paviršiaus plotą. Ar tilptų į šį indą 5 litrai vandens?

219*. Tangrama — senovinė kinų dėlionė iš kvadrato, sukarpyto į 7 dalis (5 lygiašoniai trikampiai, 1 kvadratas, 1 lygiagretainis). Kokio didumo yra atskirų dalių plotai, jeigu didžiojo kvadrato plotas lygus 1?



220. Jeigu valties greitis upėje pasroviui yra v_1, o greitis prieš srovę — v_2, tai reiškinys $\frac{v_1-v_2}{2}$ reiškia:

A savąjį valties greitį
B valties nuplauktą atstumą
C vidutinį valties greitį
D valties plaukimo upe laiką
E upės tėkmės greitį

221. Prekė atpigo tris kartus: iš pradžių 10%, po to 20% ir galiausiai 25%. Keliais procentais atpigo prekė po visų atpiginimų?

222. Daugiavaikė šeima turi 15 vaikų. Kiekvienas vaikas yra pusantrų metų vyresnis už artimiausią iš jaunesniųjų. Vyriausioji šeimos atžala aštuonis kartus vyresnė už jaunėlį. Kiek metų jaunėliui?

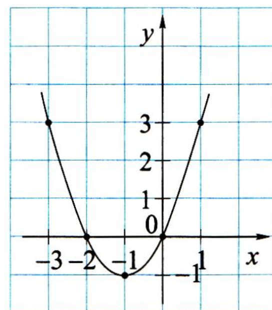
5 Funkcija $f(x) = ax^2 + bx$

Funkcija $f(x) = ax^2 + bx$ yra atskiras kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ atvejis, kai $c = 0$.

Nubraižykime funkcijos $f(x) = x^2 + 2x$ grafiką.

Sudarykime funkcijos reikšmių lentelę.

x	...	-3	-2	-1	0	1	...
$y = x^2 + 2x$	...	3	0	-1	0	3	...



Koordinačių plokštumoje pažymėję taškus ir per juos nubrėžę kreivę, gauname parabolę.

Grafiką galima nubraižyti ir kitaip.

Pertvarkykime funkciją, kad gautume pavidalą $y = a(x + m)^2 + n$:

$$f(x) = x^2 + 2x = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1.$$

Funkcijos $f(x) = x^2 + 2x$ grafikas yra parabolė $y = x^2$, pastumta į kairę per 1 vienetą ir žemyn per 1 vienetą. Parabolės viršūnė yra taške $(-1; -1)$, simetrijos ašis — tiesė $x = -1$.

Panašiai galėtume pertvarkyti kiekvieną funkciją, išreikštą formule $f(x) = ax^2 + bx$, ir įsitikinti, kad jos grafikas yra parabolė, kurią galima gauti atitinkamai pastūmus parabolę $y = ax^2$.

Įrodymas. Pertvarkykime funkciją:

$$f(x) = ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

Reiškinį $\frac{b}{2a}$ pažymėkime m, o reiškinį $-\frac{b^2}{4a}$ pažymėkime n. Gavome funkciją pavidalo $f(x) = a(x + m)^2 + n$. Žinome, kad tokios funkcijos grafikas yra parabolė $y = ax^2$, pastumta į kairę arba dešinę atstumu $|m|$ ir pastumta žemyn arba aukštyn atstumu $|n|$.

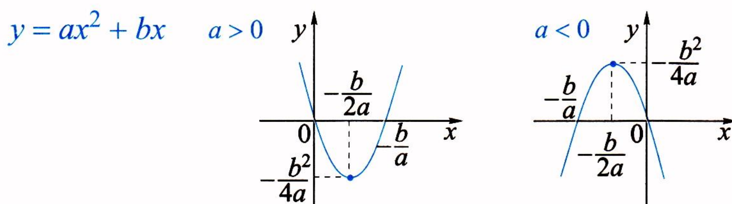
Norint rasti simetrijos ašį, pakanka sužinoti dviejų parabolei ieškoti priklausančių simetriškų taškų koordinates. Šiuo atveju patogiausia ieškoti taškų, kuriuose grafikas kerta x ašį. Su tomis x reikšmėmis funkcijos reikšmė lygi nuliui.

Argumento reikšmės, su kuriomis funkcijos reikšmė lygi nuliui, vadinamos funkcijos nuliais.

? Raskite funkcijos $f(x) = x^2 + 2x$ nulius.

Užduotis. Nubraižykite funkcijos $f(x) = -x^2 - 2x$ grafiką.

Parabolės $y = ax^2 + bx$ šakos eina aukštyn, kai $a > 0$; eina žemyn, kai $a < 0$. Parabolė yra simetriška tiesės $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu, jos viršūnė yra taške $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$.



Parabolė $y = ax^2 + bx$ gaunama pastūmus parabolę $y = ax^2$ atstumu $\left|\frac{b}{2a}\right|$ į dešinę, kai $\frac{b}{2a} < 0$, arba į kairę, kai $\frac{b}{2a} > 0$.

Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx$ grafiko braižymo eiga galėtų būti tokia:

Funkcija	$f(x) = ax^2 + bx$	$f(x) = x^2 + 2x$
Šakų kryptis	$a > 0$ — aukštyn; $a < 0$ — žemyn.	$a = 1$ — aukštyn
Funkcijos nuliai	$ax^2 + bx = 0$, $x(ax + b) = 0$, $x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$.	$x^2 + 2x = 0$, $x(x + 2) = 0$, $x = 0$, $x = -2$.
Viršūnės koordinatės x_0, y_0	$x_0 = \frac{0+(-\frac{b}{a})}{2} = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = f(x_0) = -\frac{b^2}{4a}$.	$x_0 = \frac{0+(-2)}{2} = -1$; $y_0 = f(-1) = -1$.
Grafikas	$a > 0$: y, $-\frac{b}{2a}$, $-\frac{b}{a}$, x, $-\frac{b^2}{4a}$; $a < 0$: y, $-\frac{b^2}{4a}$, $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{2a}$, x	y, -1, -2, -1, x

Pratimai ir uždaviniai

223. Raskite funkcijos grafiko šakų kryptį ir simetrijos ašį:

a) $f(x) = x^2 + 4x$ b) $f(x) = x^2 - 6x$

c) $f(x) = -2x^2 + 8x$ d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$

e) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x$ f) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$

224. Nurodykite parabolės viršūnės ir taškų, kuriuose funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis, koordinates:

a) $f(x) = 4x^2 - 8x$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

c) $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x$ d) $f(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x$

e) $f(x) = x - 0{,}25x^2$ f) $f(x) = -3x^2 + 6x$

225. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

c) $f(x) = -2x^2 - 8x$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

e) $f(x) = x^2 - 2x$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

226. Nubraižykite funkcijos $y = -x^2 + 6x$ grafiką. Nustatykite:

a) didžiausiąją funkcijos reikšmę;
b) didėjimo ir mažėjimo intervalus;
c) su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja teigiamas reikšmes; neigiamas reikšmes.

227. Nubraižykite funkcijos $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ grafiką. Nustatykite:

a) mažiausiąją funkcijos reikšmę;
b) didėjimo ir mažėjimo intervalus;
c) su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja teigiamas reikšmes; neigiamas reikšmes.

228. Vienas trapecijos pagrindas 4 cm ilgesnis už kitą. Trapecijos aukštinė lygi trumpesniajam pagrindui. Trumpesnįjį pagrindą pažymėkite x ir užrašykite trapecijos ploto priklausomybę nuo x. Kokią funkciją gavote?

229. Stačiakampio perimetras lygus 12 cm.

a) Vieną kraštinę pažymėkite x. Įrodykite, kad stačiakampio plotas lygus $-x^2 + 6x$.
b) Nubraižykite funkcijos $f(x) = -x^2 + 6x$ grafiką.
c) Remdamiesi grafiku raskite didžiausiąją funkcijos reikšmę.
d) Kokie turėtų būti stačiakampio kraštinių ilgiai, kad jo plotas būtų didžiausias?

230. Kamuoliukas metamas vertikaliai aukštyn pradiniu 24 m/s greičiu. Atstumo nuo kamuoliuko iki žemės h (m) priklausomybė nuo lėkimo laiko t (s) išreikšta formule $h(t) = 24t - 5t^2$. Nubraižykite scheminį funkcijos $y = h(t)$ grafiką. Remdamiesi grafiku atsakykite į klausimus:

a) Kiek laiko kamuoliukas kilo aukštyn ir kiek leidosi žemyn?
b) Po kiek laiko kamuoliukas nukrito ant žemės?
c) Kokią prasmę galima suteikti parabolės viršūnės taško ordinatei?

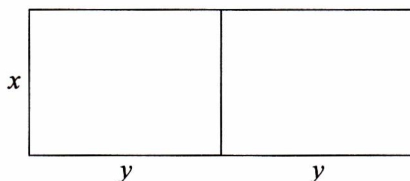
231. Iš trijų pusių reikia aptverti tvorele stačiakampę aikštelę, esančią prie sienos. Tvorelės ilgis turi būti 60 m.

a) Vieną aikštelės kraštinę pažymėję x cm, išreikškite x-u kitą kraštinę.
b) Įrodykite, kad aikštelės plotas $S(x) = -2x^2 + 60x$.
c) Nurodykite parabolės $y = -2x^2 + 60x$ viršūnės koordinates.
d) Su kuria x reikšme $S(x)$ įgyja didžiausią reikšmę?
e) Koks turėtų būti aikštelės ilgis ir plotis, kad aikštelės plotas būtų didžiausias?

232. Iš fontano trykštančio vandens srovė yra parabolės, atitinkančios funkcijos $f(x) = -2{,}5x^2 + 5x$ grafiką, formos.

a) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką.
b) Remdamiesi grafiku, raskite srovės aukštį aukščiausiame jos taške ir didžiausią nuotolį, kurį gali pasiekti vanduo.

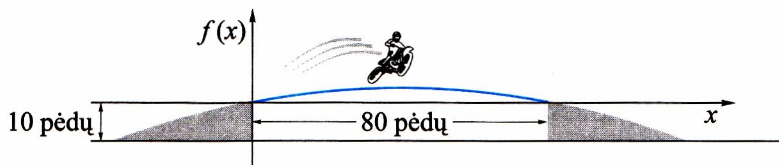
233. Ūkininkas turi 120 metrų tvoros, kurią nori panaudoti įrengdamas avims du lygius stačiakampio formos aptvarus, turinčius bendrą kraštinę.



a) Abiejų aptvarų plotą $S(x)$ išreikškite x-o funkcija.
b) Raskite tokius aptvarų matmenis, kad užimamas plotas būtų didžiausias.

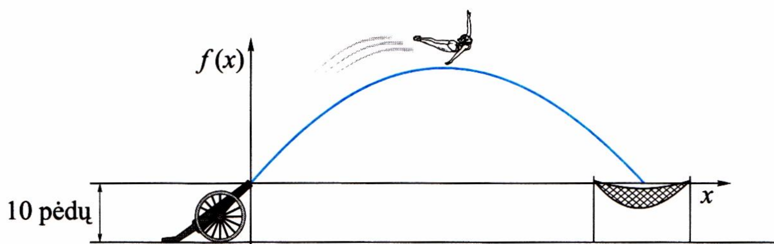
234. Gaisrinės mašinos pumpuojamo vandens srovė yra parabolės, atitinkančios funkcijos $f(x) = 3x - 0{,}2x^2$ grafiką, formos. Raskite didžiausią vandens pakilimo aukštį ir didžiausią nuotolį, kurį pasiekia vanduo.

235. Kaskadininkas nori su motociklu peršokti nuo vienos platformos ant kitos, kaip parodyta pavaikslėlyje. Platformų aukštis 10 pėdų, atstumas tarp jų 80 pėdų. (Pėda — ilgio matas, lygus 30,5 cm.) Kaskadininko šuolio trajektorija atitinka funkcijos $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{320}x^2$ grafiką.



Raskite didžiausią aukštį nuo žemės, į kurį gali pakilti kaskadininkas.

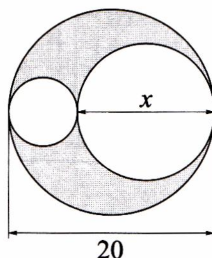
236. Iš patrankos iššauto cirko artisto skrydžio trajektorija atitinka funkcijos $f(x) = x - \frac{1}{100}x^2$ grafiką. Patrankos vamzdžio anga ir tinklas yra 10 pėdų aukštyje nuo žemės, kaip parodyta paveikslėlyje.



a) Koks turi būti atstumas tarp patrankos vamzdžio angos ir tinklo vidurio, kad artistas saugiai nusileistų?
b) Koks didžiausias artisto pakilimo nuo žemės aukštis?

237. Stačiakampio gretasienio formos 4 metrų aukščio sandėlio statybai paruošta medžiaga išorinėms sienoms. Jos užtenka sienoms, kurių bendras ilgis 32 metrai. Koks turėtų būti sandėlio ilgis ir plotis, kad jo tūris būtų didžiausias?

238. Brėžinyje nuspalvintos dalies plotą pažymėkite y.
a) Įrodykite, kad nuspalvintos dalies plotas $y = -\frac{\pi}{2}x^2 + 10\pi x$.
b) Raskite parabolės $y = -\frac{\pi}{2}x^2 + 10\pi x$ viršūnės koordinates.
c) Su kuria x reikšme y reikšmė didžiausia?
d) Su kuria x reikšme nenuspalvintos dalies plotas mažiausias?



239. a) Per koordinačių plokštumos taškus $A(-2; 3)$ ir $B(-2; -1)$ nubrėžkite tiesę. Kam lygios tiesės taškų abscisės?
b) Per koordinačių plokštumos taškus $M(0; 3)$ ir $N(-3; 3)$ nubrėžkite tiesę. Kam lygios tiesės taškų ordinatės?

240. Stačiosios trapecijos pagrindai lygūs 2 cm ir 4 cm, o smailusis kampas lygus 45°. Raskite trapecijos:
a) trumpesniąją šoninę kraštinę;
b) ilgesniąją šoninę kraštinę;
c) perimetrą;
d) plotą;
e) įstrižaines.

241. Iš geležies buvo pagaminti trys kubai, kurių briaunos — 3 cm, 4 cm ir 5 cm. Šie kubai buvo sulydyti ir išlietas naujas kubas. Kokia šio kubo briauna?

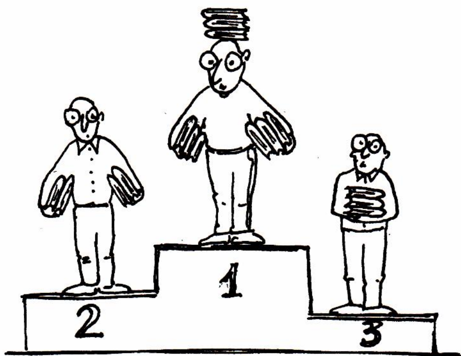
242. Kokius aritmetinius ženklus reikia parašyti žvaigždučių vietoje, kad reiškinio $5\star\frac{5\star 5\star 5}{5}$ skaitinė reikšmė būtų lygi 8?

243. Kontroliniam darbui buvo paruošti popieriaus lapai. Jeigu klasės mokiniams jų būtų išdalyta po du lapus, tai liktų 16 lapų, o jei po tris, tai trūktų 12 lapų. Kiek mokinių yra klasėje ir kiek buvo paruošta popieriaus lapų?

244. Jeigu $a < 0$, tai $\sqrt{\frac{a^2}{4}} = \ldots$

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{a}{2}$ **C** $-\frac{a}{4}$ **D** $-\frac{|a|}{4}$ **E** $-\frac{a}{2}$

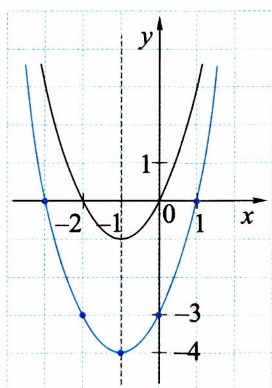
245. Penki mokyklos olimpiados dalyviai gavo I, II ir III laipsnio diplomus, už atitinkamai surinktus 15, 14 ir 13 taškus. Kiek dalyvių pelnė kurį diplomą, jeigu visi kartu jie surinko 69 taškus?



6 Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$

Kadangi funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmės nuo atitinkamų funkcijos $g(x) = ax^2 + bx$ reikšmių skiriasi tik pastoviu dydžiu c, tai funkcijos $y = f(x)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = g(x)$ grafiko, pastūmus jį atstumu c aukštyn, kai $c > 0$, arba atstumu $|c|$ žemyn, kai $c < 0$.

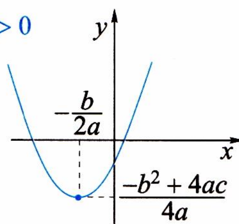
Nubraižykime funkcijos $f(x) = x^2 + 2x - 3$ grafiką.
Pastebėkime, kad duotosios funkcijos reikšmės trimis vienetais mažesnės už atitinkamas funkcijos $g(x) = x^2 + 2x$ reikšmes. Funkcijos $y = f(x)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = g(x)$ grafiko, pastūmus jį žemyn per 3 vienetus.

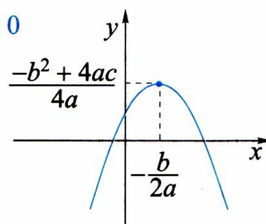


Užduotis. Nubraižykite funkcijos $g(x) = -x^2 - 2x + 3$ grafiką.

Parabolės $y = ax^2 + bx + c$ šakos eina aukštyn, kai $a > 0$; eina žemyn, kai $a < 0$. Parabolės viršūnė yra taške $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$, simetrijos ašis — tiesė $x = -\frac{b}{2a}$.

$y = ax^2 + bx + c$





Parabolę $y = ax^2 + bx + c$ galima gauti pastūmus parabolę $y = ax^2 + bx$ atstumu c aukštyn, kai $c > 0$, arba atstumu $|c|$ žemyn, kai $c < 0$.

Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiko braižymo eiga galėtų būti tokia:

Funkcija	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = x^2 + 2x - 3$
Šakų kryptis	$a > 0$ — aukštyn; $a < 0$ — žemyn.	$a = 1$ — aukštyn
Funkcijos $g(x) = ax^2 + bx$ nuliai	$ax^2 + bx = 0$, $x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$.	$x^2 + 2x = 0$, $x = 0$, $x = -2$.
Viršūnės koordinatės x_0, y_0	$x_0 = \frac{0+(-\frac{b}{a})}{2} = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = f(x_0) = -\frac{-b^2+4ac}{4a}$.	$x_0 = \frac{0+(-2)}{2} = -1$; $y_0 = f(-1) = -4$.
Simetrijos ašis	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = -1$
Grafikas	$a > 0$: y, x, $-\frac{b}{2a}$, $\frac{-b^2+4ac}{4a}$ $a < 0$: y, x, $\frac{-b^2+4ac}{4a}$, $-\frac{b}{2a}$	y, x, -1, -4

Pratimai ir uždaviniai

246. Nurodykite parabolės šakų kryptį. Raskite simetrijos ašį, viršūnės koordinates ir susikirtimo su Oy ašimi taško koordinates:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$;

b) $f(x) = x^2 + 6x + 6$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$;

d) $f(x) = -x^2 + 8x - 18$;

e) $y = 2x^2 - 16x + 33$;

f) $f(x) = -x^2 + 4x + 4$.

247. Raskite funkcijos grafiko simetrijos ašį ir viršūnės koordinates. Nubraižykite scheminį funkcijos grafiką. Remdamiesi grafiku, nurodykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = x^2 + 6x + 11$;

b) $f(x) = x^2 - 8x + 14$;

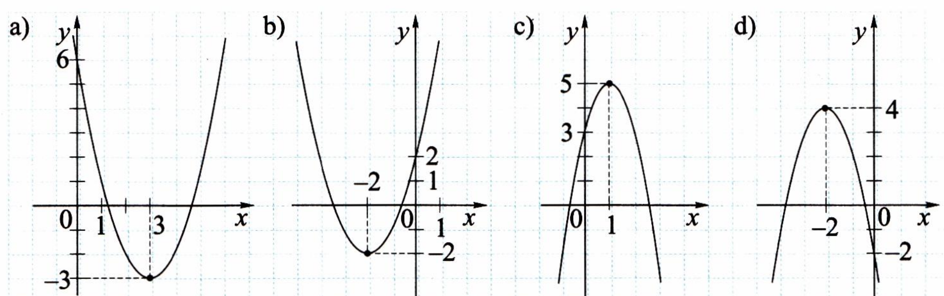
c) $f(x) = -x^2 + 6x - 6$;

d) $f(x) = -x^2 - 10x - 24$;

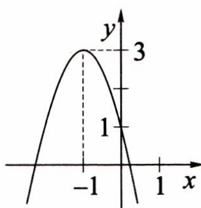
e) $y = -2x^2 + 4x - 5$;

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6\frac{1}{2}$.

248. Nurodykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + bx + c$, kurios grafikas atitinka nubraižytą parabolę:



Pavyzdys.



Nurodykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + bx + c$, kurios grafikas atitinka nubraižytą parabolę.

Sprendimas.

1) Parabolės viršūnė yra taške $(-1; 3)$, todėl $f(x) = a(x+1)^2 + 3$.

2) Taškas $(0; 1)$ priklauso funkcijos grafikui, todėl $f(0) = 1$.

Taigi $a(0+1)^2 + 3 = 1$, $a = -2$.

Funkcijos lygtis:

$f(x) = -2(x+1)^2 + 3 = -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = -2x^2 - 4x + 1$.

Atsakymas. $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

249. Raskite funkcijos grafiko simetrijos ašį ir viršūnės koordinates. Nubraižykite scheminį funkcijos grafiką. Raskite didžiausiąją ar mažiausiąją funkcijos reikšmę ir funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ b) $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$

c) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 10$

e) $y = -2x^2 - 8x - 2$ f) $f(x) = -4x^2 - 4x - 1$

250. Nubraižykite funkcijos grafiką. Remdamiesi grafiku, nurodykite argumento reikšmes, su kuriomis funkcija įgyja neigiamąsias reikšmes, teigiamąsias reikšmes:

a) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$

e) $y = -2x^2 + 4x - 2$ f) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

251. Raskite koeficientų b ir c reikšmes, jeigu žinoma, kad kvadratinės funkcijos $f(x) = x^2 + bx + c$ grafikas yra parabolė, kurios viršūnė yra taške $(m; n)$:

a) $m = 2$, $n = -1$ b) $m = -1$, $n = 3$
c) $m = -4$, $n = -12$ d) $m = 3$, $n = -7$

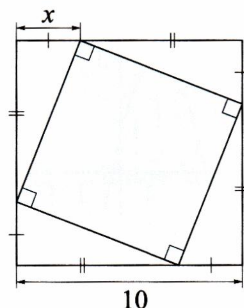
Pavyzdys. Raskite koeficientų b ir c reikšmes, jeigu žinoma, kad kvadratinės funkcijos $f(x) = x^2 + bx + c$ grafikas yra parabolė, kurios viršūnė yra taške (3; 2).

Sprendimas. Žinant parabolės viršūnės koordinates, funkciją $y = f(x)$ galima užrašyti taip: $f(x) = (x-3)^2 + 2$ arba $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Tuomet $b = -6$, $c = 11$.

Atsakymas. $b = -6$, $c = 11$.

---

252. Didžiojo kvadrato kraštinė lygi 10.
a) Įrodykite, kad nuspalvinto kvadrato plotas lygus $y = 2x^2 - 20x + 100$.
b) Nubraižykite scheminį funkcijos grafiką.
c) Remdamiesi grafiku raskite mažiausią funkcijos reikšmę.
d) Su kuria x reikšme nuspalvinto kvadrato plotas mažiausias?



253. Pasipriešinimo jėga $f(v)$ važiuojant automobiliu greičiu v išreiškiama formulėmis:
a) autostrada: $f = 24 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{30}v^2$;
b) plentu: $f = 28 - \frac{1}{4}v - \frac{1}{50}v^2$;
c) akmeniniu grindiniu: $f = 29 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{15}v^2$;
d) vieškeliu: $f = 36{,}5 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{30}v^2$.
Kuriuo keliu ir kokiu greičiu važiuojant pasipriešinimas mažiausias?

254. Bendrovė nustatė, kad išleidus x tūkstančių litų reklamai parduodama $N(x)$ prekių. Nustatykite, kiek tūkstančių litų reikia išleisti reklamai, kad prekyba eitųsi geriausiai, kai:
a) $N(x) = -3x^2 + 150x + 1200$, $20 \leqslant x \leqslant 50$;
b) $N(x) = -8x^2 + 120x + 450$, $4 \leqslant x \leqslant 20$;
c) $N(x) = -4x^2 + 180x + 750$, $15 \leqslant x \leqslant 30$.

255. Paveikus tam tikru preparatu bakterijų koloniją, jų skaičius (tūkstančiais) po t valandų apytiksliai lygus $N(t)$. Po kiek valandų bakterijų kolonija nustos augusi ir ims nykti, jeigu:

a) $N(t) = 300 + 800t - 100t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 9$;

b) $N(t) = -19t^2 + 160t + 400$, $0 \leqslant t \leqslant 7$;

c) $N(t) = -4{,}5t^2 + 140t + 500$, $0 \leqslant t \leqslant 25$?

256. Naftą gabenančio tanklaivio talpa 40000 m^3. Naftos žymeklis parodo atstumą nuo rezervuaro viršaus iki jame esančios naftos lygio. Žymeklyje yra penkios žymės: 0, 1, 2, 3, 4 sužymėtos vertikaliai vienodais atstumais. Kai tanklaivis pilnas, žymeklis yra ties 0. Naftos tūris tanklaivyje apskaičiuojamas pagal formulę $f(x) = 40 - x - 2x^2$; čia x — atstumas nuo rezervuaro viršaus iki naftos lygio.

a) Užpildykite lentelę.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					

b) Milimetriniame popieriuje nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

c) Funkcijos grafike punktyrais nurodykite žymeklio padėtį, kai rezervuare yra 10 tūkst. m^3 naftos.

d) Kiek naftos yra tanklaivyje, jeigu žymeklis yra ties $1\frac{1}{2}$?

e) Kiek naftos yra tanklaivyje, jeigu žymeklis yra ties 4?

257. Lygiašonio trikampio pagrindas 6 cm ilgesnis už šoninę kraštinę, o trikampio perimetras lygus 96 cm. Raskite šio trikampio

a) kraštines;
b) aukštinę, nubrėžtą į pagrindą;
c) plotą;
d) aukštinę, nubrėžtą į šoninę kraštinę.

258. Apskaičiuokite:

a) $0{,}6 : (-1{,}5) - 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + 1\frac{4}{5}$;

b) $\left(1\frac{5}{54} - \frac{11}{36}\right) \cdot 3\frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{7} - 1\frac{2}{7} \cdot 1\frac{5}{9}$.

259. Gimtosios kalbos egzamino rezultatai pateikti lentelėje.

Pažymys	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	3	5	6	8	12	9	6	4

a) Pavaizduokite duomenis histograma.

b) Apskaičiuokite egzamino pažymių vidurkį.

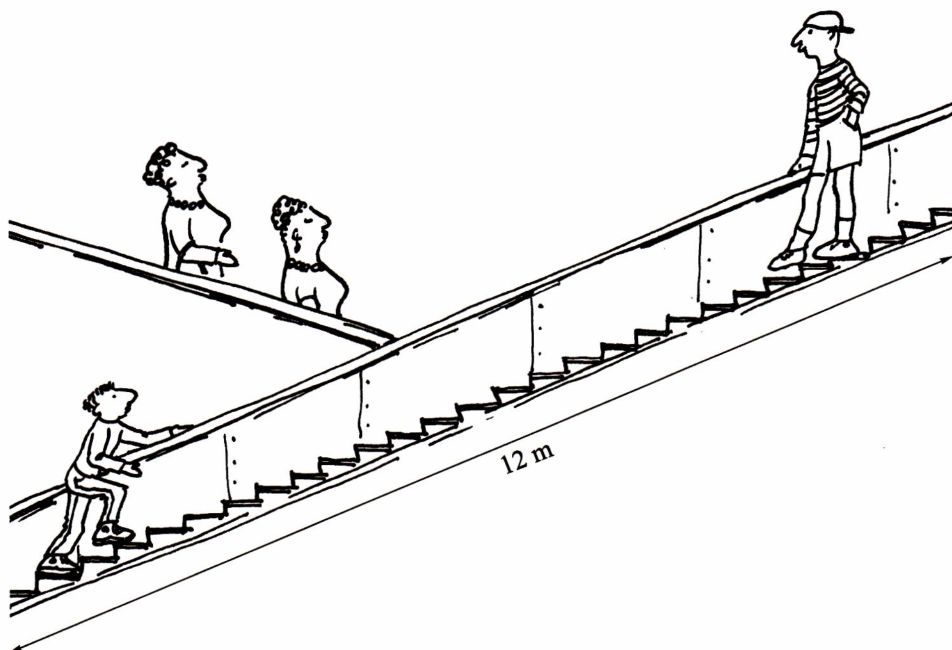
260. Įrodykite tapatybę:

a) $m^4 - n^4 = (m - n)(m + n)(m^2 + n^2)$;

b) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2 = (a - b - c)(a + b + c)$.

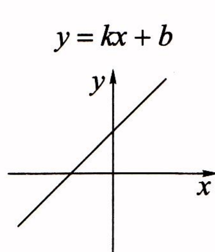
261. 12 metrų ilgio eskalatorius juda 1 m/s greičiu. Du vaikai tuo pačiu metu iš skirtingų eskalatoriaus galų pradeda eiti 1,5 m/s greičiu. Koks bus atstumas nuo artimesniojo eskalatoriaus galo iki vaikų, kai jie susitiks?

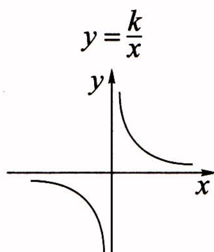
A 1,5 m **B** 2 m **C** 3 m **D** 4 m **E** 5 m

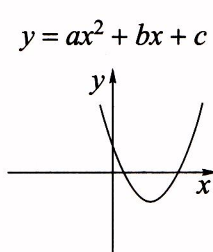


7 Grafinis uždavinių sprendimas

Sprendžiant uždavinius dažnai tenka braižyti įvairių funkcijų grafikus. Jau mokame braižyti funkcijų $f(x) = kx + b$, $f(x) = \frac{k}{x}$ ir $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafikus.







Dažnai vienoje koordinačių plokštumoje tenka braižyti dviejų ar daugiau funkcijų grafikus. Iš gauto brėžinio galima sužinoti bendras tiriamų funkcijų savybes ir jų tarpusavio sąryšius.

Norėdami nustatyti apytikslius lygties sprendinius, sprendinių skaičių, spręsdami nelygybes, taip pat galime naudotis funkcijų grafikais. Grafinį sprendimo būdą renkamės tuomet, kai jis yra efektyvesnis už kitus būdus arba yra vienintelis prieinamas būdas.

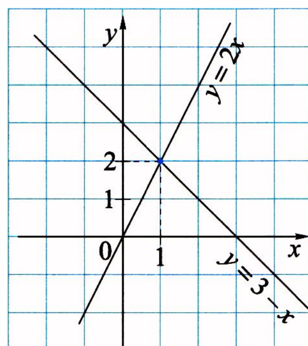
Susipažinkime su svarbia funkcijų grafikų susikirtimo taško savybe.

Dviejų funkcijų grafikų susikirtimo taške funkcijų reikšmės yra lygios.

PAVYZDYS. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime funkcijų $f(x) = 2x$ ir $g(x) = 3 - x$ grafikus.

Abiejų funkcijų grafikai yra tiesės, susikertančios taške (1; 2). Tai reiškia, kad funkcijų $f(x) = 2x$ ir $g(x) = 3 - x$ reikšmės, kai $x = 1$, yra lygios ($y = 2$).

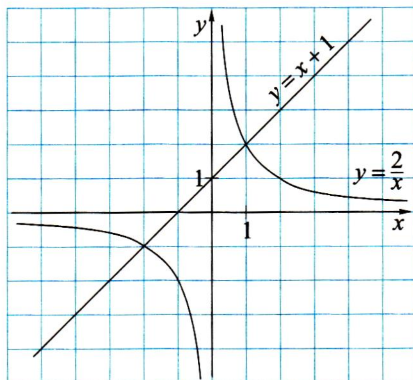
Kai $x \neq 1$, abi funkcijos įgyja skirtingas reikšmes. Kai $x > 1$, funkcijos $f(x) = 2x$ grafikas yra aukščiau funkcijos $g(x) = 3 - x$ grafiko. Tai reiškia, kad funkcijos $f(x) = 2x$ reikšmės, kai $x > 1$, yra didesnės už funkcijos $g(x) = 3 - x$ reikšmes.



Kai $x < 1$, yra atvirkščiai: funkcijos $g(x) = 3 - x$ reikšmės yra didesnės už atitinkamas funkcijos $f(x) = 2x$ reikšmes.

1 UŽDAVINYS. Kiek sprendinių turi lygtis $\frac{2}{x} = x + 1$?

Klausimą galima pakeisti kitu: kiek yra kintamojo x reikšmių, su kuriomis funkcijų $f(x) = \frac{2}{x}$ ir $g(x) = x + 1$ reikšmės yra lygios?

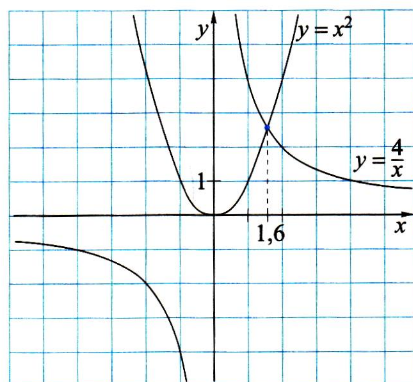


Sprendimas. Nubraižykime funkcijų grafikus. Funkcijos $f(x) = \frac{2}{x}$ grafikas yra hiperbolė, o funkcijos $g(x) = x + 1$ – tiesė. Lygtis turi du sprendinius, nes grafikai susikerta dviejuose taškuose.

Atsakymas. Lygtis turi du sprendinius.

2 UŽDAVINYS. Apytiksliai raskime lygties $x^2 = \frac{4}{x}$ sprendinius.

Sprendimas. Nubraižykime parabolę $y = x^2$ ir hiperbolę $y = \frac{4}{x}$.
Grafikai susikerta viename taške. Tame taške funkcijų reikšmės lygios. Nustatykime to taško abscisę x. Kuo tiksliau nubraižytas grafikas, tuo tiksliau galima rasti sprendinį. Šiuo atveju galime spėti, kad $x \approx 1{,}6$.

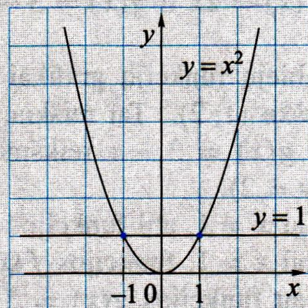


Atsakymas. $x \approx 1{,}6$.

3 UŽDAVINYS. Išspręskime nelygybę $x^2 > 1$.

Sprendimas. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime funkcijų $f(x) = x^2$ ir $g(x) = 1$ grafikus.

Matome, kad $x = -1$ ir $x = 1$ yra funkcijų grafikų susikirtimo taškų abscisės. Su tomis x reikšmėmis abiejų funkcijų reikšmės yra lygios. Kai $x > 1$, parabolė $y = x^2$ yra virš tiesės $y = 1$. Tai reiškia, kad $x^2 > 1$, kai $x > 1$. Kai $x < -1$, parabolė taip pat yra virš tiesės ir $x^2 > 1$.

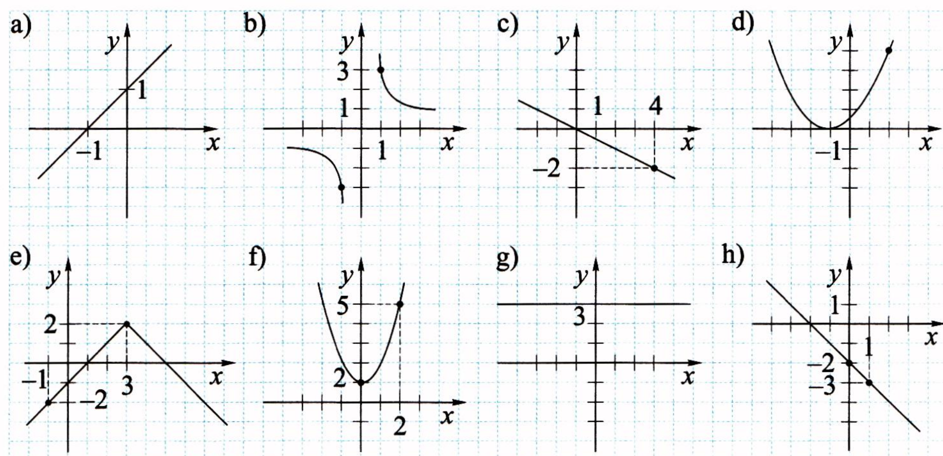


Atsakymas. $x < -1$, $x > 1$.

Užduotis. Remdamiesi tuo pačiu brėžiniu išspręskite nelygybę $x^2 < 1$.

Pratimai ir uždaviniai

262. Užrašykite funkciją, kuri atitinka nubrėžtą grafiką:



263. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $f(x) = 5x$ ir $f(x) = 2x + 6$ grafikus.

a) Remdamiesi brėžiniu raskite grafikų susikirtimo taško koordinates.

b) Apskaičiuokite grafikų susikirtimo taško koordinates.

264. Duotos tiesinės funkcijos: $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų grafikus.

b) Remdamiesi grafikais raskite lygties $4x - 3 = \frac{1}{2}x + 2$ sprendinius.

c) Remdamiesi grafikais raskite nelygybės $4x - 3 \geqslant \frac{1}{2}x + 2$ sprendinius.

265. Grafiškai raskite lygties sprendinių skaičių:

a) $\frac{4}{x} = x$; b) $\frac{3}{x} = 4x - 2$; c) $-\frac{1}{x} = x$; d) $\frac{4}{x} = -3x + 2$.

266. Grafiškai raskite lygties sprendinių skaičių:

a) $\frac{4}{x} = -0{,}5x^2$; b) $-\frac{5}{x} = 5x^2$; c) $-\frac{2}{x} = 2x^2$; d) $-\frac{3}{x} = -3x^2$.

267. Grafiškai išspręskite lygtis:

a) $\frac{6}{x} = -0{,}5x^2 + 8$

b) $x^2 - 4 = x + 2$

c) $x^2 - 4 = 0{,}5x$

d) $x^2 - 2 = 2x + 1$

268. Grafiškai išspręskite nelygybes:

a) $x^2 > 4$; b) $x^2 < 1$; c) $x^2 \leqslant 9$; d) $x^2 \leqslant \frac{4}{9}$.

269. Tiesėmis $y = x$, $y = -x$ ir $y = 6$ apriboto trikampio plotas yra:

A 12 **B** $12\sqrt{2}$ **C** 24 **D** $24\sqrt{2}$ **E** 36

270*. Nustatykite rūšį keturkampio, kurio viršūnės yra tiesių $y = x + 3$, $y = x - 3$, $y = -x + 3$ ir $y = -x - 3$ susikirtimo taškai.

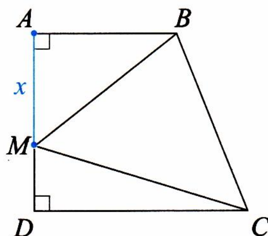
271*. Duotos tiesinės funkcijos: $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = -3x + 4$ ir $h(x) = 5$.

a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų grafikus.
b) Abscisių ašyje pažymėkite nelygybės $5x - 2 \geqslant 5$ sprendinių intervalą.
c) Abscisių ašyje pažymėkite nelygybės $-3x + 4 \leqslant 5$ sprendinių intervalą.

272. Duotos tiesinės funkcijos: $f(x) = \frac{7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{1}{4}x$ ir $h(x) = 4$.

a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų grafikus.
b) Remdamiesi grafiku raskite tiesių susikirtimo taškų koordinates.
c) Skaičiuodami raskite susikirtimo taškų koordinates.

273. Duota stačioji trapecija $ABCD$, $\angle A = 90°$, $\angle D = 90°$, $AB = 4$, $CD = 6$, $AD = 5$. Kraštinėje AD pažymėtas taškas M, $AM = x$.



a) Kokios galimos x reikšmės?
b) Parodykite, kad $\triangle ABM$, $\triangle BMC$ ir $\triangle CDM$ plotai yra tiesinės x funkcijos.
c) Vienoje koordinačių plokštumoje (geriausia milimetriniame popieriuje) nubraižykite trijų gautų funkcijų grafikus.
d) Remdamiesi brėžiniu raskite tokią x reikšmę, su kuria trikampių ABM ir MCD plotai lygūs.
e) Remdamiesi brėžiniu raskite tokią x reikšmę, su kuria trikampių BMC ir MCD plotai lygūs.

274*. Dvi stačiosios trapecijos turi vieną lygų pagrindą $AB = 4$ cm.

a) Trapecijoje $ABCD$: $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 90°$, $DC = 6$ cm, $AD = x$. Užrašykite ploto $S(x)$ priklausomybės nuo x formulę. Nubraižykite funkcijos $y = S(x)$ grafiką.
b) Trapecijoje $ABEF$: $\angle BAF = 90°$, $\angle ABE = 90°$, $BE = 3$ cm, $AF = x$. Užrašykite ploto $Q(x)$ priklausomybės nuo x formulę. Nubraižykite funkcijos $y = Q(x)$ grafiką.
c) Su kuria x reikšme plotų reikšmės lygios?
d) Su kuriomis x reikšmėmis plotas $Q(x)$ didesnis už plotą $S(x)$?

275. a) Sodinant medelius per 3 m vienas nuo kito, į vieną eilę galima pasodinti 49 medelius. Kiek medelių tilptų vienoje eilėje, jeigu vienas nuo kito jie būtų sodinami per 4 metrus; 6 metrus; 8 metrus; 12 metrų?

b) Ratas apsisukęs 250 kartų, nuriedėjo 549,5 m. Kiek kartų jis turi apsisukti, kad nuriedėtų 879,2 metro?

276. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm, 10 cm. Raskite šio trikampio:

a) perimetrą;
b) kampus;
c) plotą;
d) aukštinę, nubrėžtą į ilgiausiąją kraštinę;
e) ilgiausios kraštinės atkarpas, į kurias ją dalija aukštinė.

277. Duota: $ABCD$ — lygiagretainis,
$\angle ADE = \angle CDE$, $CD = 10$ cm,
$AE : EB = 3 : 2$.
Rasti: a) AD; b) P_{ABCD}.

D C
A E B

278. Apskaičiuokite reiškinio $2m^n$ skaitinę reikšmę, kai:

a) $m = 2; n = -1$ b) $m = -1; n = 2$
c) $m = -2; n = -3$ d) $m = -3; n = -2$

279. Iš Klaipėdos ir Žiežmarių, tarp kurių 245 km, tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo autobusas ir lengvasis automobilis. Jie susitiko po $1\frac{13}{36}$ valandos. Kokiu greičiu važiavo kiekviena mašina, jeigu lengvojo automobilio greitis buvo 20 km/h didesnis už autobuso greitį? Spręsdami sudarykite lygtį, nežinomuoju x pažymėję:

a) autobuso greitį;
b) lengvojo automobilio greitį.

280. Keturženklis skaičius 83 □□ yra skaičiaus 90 kartotinis. Koks paminėtų skaičių dalmuo?

A 94 **B** 93 **C** 92 **D** 91 **E** 90

Pasitikrinkite

1. Kuri iš žemiau nurodytų funkcijų yra kvadratinė?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{3x^2} + x + 1$
c) $f(x) = \frac{2x^2-5x}{3}$ d) $f(x) = 3x - 1 + \frac{1}{2}x^2$
e) $f(x) = \frac{1}{2x^2-4x+3}$ f) $f(x) = 4 - 5x^2$

2. Nurodykite kvadratinių funkcijų $f(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientų a, b ir c reikšmes:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$ b) $f(x) = 3 - 2x^2$
c) $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 1$ d) $f(x) = \frac{5x^2-7x+6}{2}$
e) $f(x) = 3x - x^2$ f) $f(x) = 7 - x^2 + 3x$

3. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + bx + c$, kurios koeficientai būtų:
a) $a = 1$; $b = -2$; $c = 3$;
b) $a = \frac{1}{2}$; $c = -3$; $b = 2$;
c) $c = \frac{2}{3}$; $b = 0$; $a = -1$.

4. Duota funkcija $f(x) = -x^2 + 2x + 2$. Apskaičiuokite:
a) $f(3)$; b) $f(-3)$; c) $f\left(\frac{3}{4}\right)$; d) $f(a-1)$; e) $f(x-2)$; f) $f(c)$.

5. Ar priklauso funkcijos $f(x) = 40x^2$ grafikui taškai:
$A(-2; -160)$; $B(2; 160)$; $C(0{,}1; 0{,}4)$; $D(-2; 160)$?

6. Naudodamiesi parabolės $y = x^2$ šablonu, nubraižykite funkcijų grafikus:

a) $f(x) = x^2 - 5$ b) $f(x) = -x^2 + 3$ c) $f(x) = (x-3)^2$
d) $f(x) = (x+2)^2$ e) $y = (x-2)^2 + 3$ f) $f(x) = -(x-4)^2 + 3$

7. Naudodamiesi parabolės $y = 2x^2$ arba $y = \frac{1}{2}x^2$ šablonu, nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$
c) $f(x) = -2x^2 + 3$ d) $f(x) = 2(x+3)^2 - 3$
e) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)^2$ f) $f(x) = 2(x-3)^2$

8. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ b) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$
c) $f(x) = -x^2 + 2x$ d) $f(x) = -x^2 - 6x - 7$
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ f) $f(x) = 2x^2 - 4x$

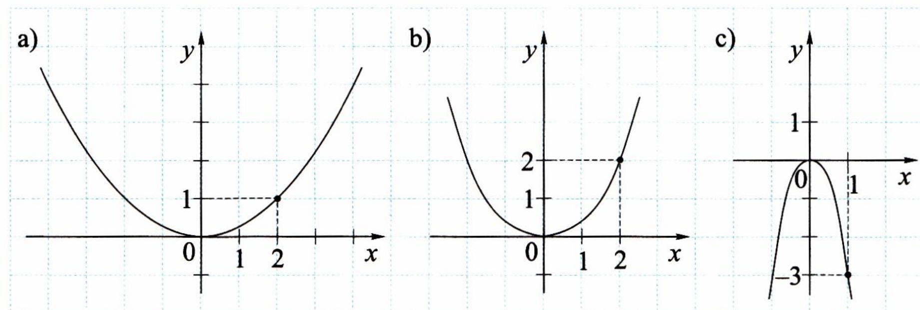
9. Nurodykite parabolės simetrijos ašį, apskaičiuokite viršūnės koordinates ir nubraižykite scheminį funkcijos grafiką:

a) $y = 6x^2 + 4$ b) $y = -x^2 - 4x$ c) $y = -4x^2 - 5$
d) $y = x^2 - 4x + 8$ e) $y = (x + 8)^2$ f) $y = -(x-1)^2-4$

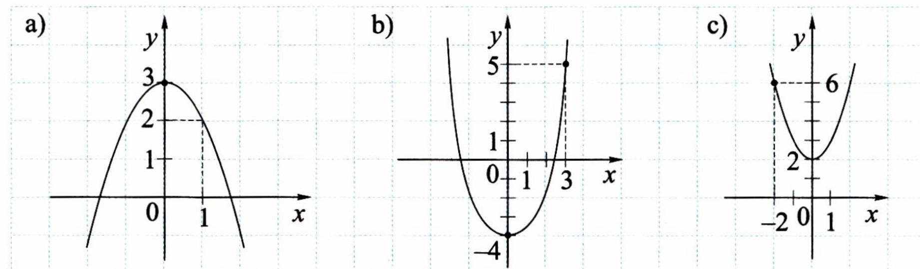
10. Nurodykite didžiausiąją arba mažiausiąją funkcijos reikšmę:

a) $f(x) = 3x^2 + 2$ b) $f(x) = -4x^2 + 5$
c) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 10$
e) $f(x) = -2(x - 3)^2 + 2{,}5$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2$

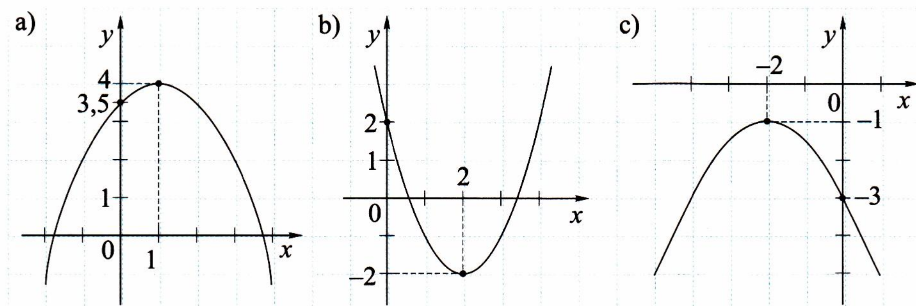
11. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2$, kurios grafikas būtų nubraižyta parabolė:



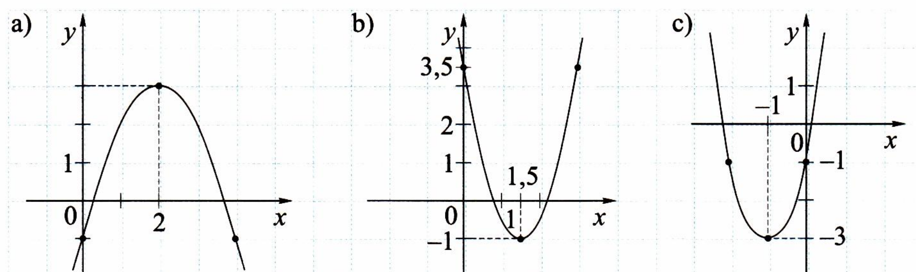
12. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + c$, kurios grafikas būtų nubraižyta parabolė:



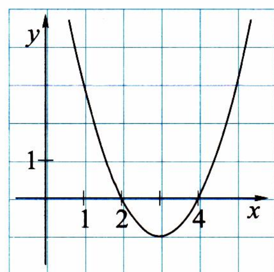
13. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = a(x + m)^2 + n$, kurios grafikas būtų nubraižyta parabolė:



14. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2 + bx + c$, kurios grafikas būtų nubraižyta parabolė:



15. Remdamiesi grafiku pasakykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja teigiamas, neigiamas reikšmes.



16. Nubraižykite funkcijos $y = -x^2 - 4x$ grafiką. Nurodykite:

a) parabolės viršūnės koordinates ir simetrijos ašį;

b) koordinates taškų, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis;

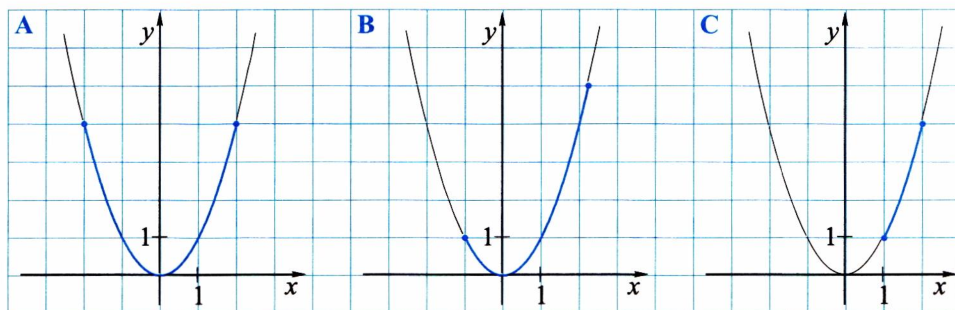
c) funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus;

d) didžiausią arba mažiausią funkcijos reikšmę ir funkcijos reikšmių sritį.

17. Nubraižytas funkcijos $y = x^2$ grafikas.

a) Nurodykite x reikšmių intervalą, atitinkantį nuspalvintą grafiko dalį.

b) Nurodykite didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmę tame intervale.



18. Grafiniu būdu išspręskite lygtį:

a) $2x^2 = 5x - 2$; b) $x^2 - 8 = 4 - x$.

19. Grafiškai nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis:

a) $-\frac{1}{2}x^2 + 3 = 2x - 1$; b) $x^2 - 4 = -\frac{3}{x}$.

20. Nurodykite parabolės šakų kryptį ir taško, kuriame ji kerta y ašį, koordinates:

a) $y = 3x^2 + x - 17$ b) $y = -2x^2 - 5x + 12$

c) $y = -x^2 + 3x - 4{,}5$ d) $y = 2x^2 + x + 3$

21. Iš 5 m aukščio paleista strėlė vertikaliai aukštyn, kurios pradinis greitis 50 m/s. Strėlės lėkimo aukštis h (m) kintant laikui t (s) apskaičiuojamas pagal formulę $h = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$, $g \approx 10\,\text{m/s}^2$ — laisvai krintančio kūno pagreitis.

a) Įsitikinkite, kad formulę aukščiui skaičiuoti galima užrašyti taip: $h = -5(t - 5)^2 + 130$.

b) Nubraižykite grafiką, vaizduojantį strėlės aukščio h kitimą kintant laikui t.

c) Per kiek sekundžių nuo paleidimo strėlė nukrinta ant žemės?

d) Kiek metrų nuo žemės buvo strėlė, pasiekusi aukščiausiąjį tašką?

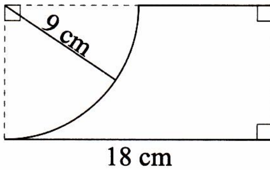
22. Krintantis ant žemės akmuo per t sekundžių apytiksliai nukrenta atstumą $h = 5t^2$. Šachtos gylis yra 120 m. Ar nuo žemės paviršiaus paleistas akmuo pasieks šachtos dugną per 4 s? per 5 s?

23. Stačiosios trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus 10 cm, o šoninės kraštinės yra 12 cm ir 13 cm. Raskite šios trapecijos:

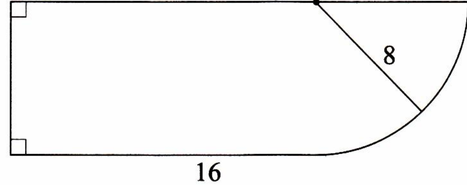
a) trumpesnįjį pagrindą; b) perimetrą; c) plotą; d) įstrižainių ilgius.

24. Pagal brėžinio duomenis raskite figūros perimetrą ir plotą.

a)



b)



25. Pirmas skaičius lygus $\frac{2}{9}$ skaičiaus 18, o antras — 40% skaičiaus 40. Tuos du skaičius:

a) sudėkite;
b) atimkite vieną iš kito;
c) sudauginkite;
d) padalykite vieną iš kito.

26. Išspręskite lygtį:

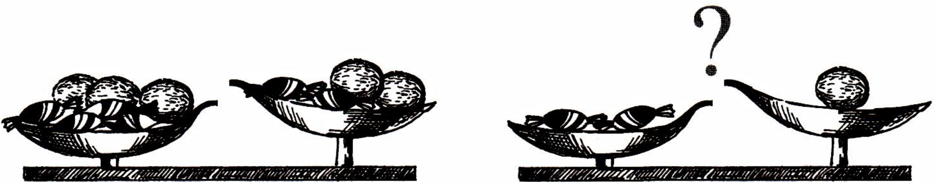
a) $(x+4)(x+1)-3(4x-7)=(x-6)^2$;
b) $(2x+7)^2-(2x-1)(2x+3)=4$.

27. Apskaičiuokite:

a) $\frac{2^2}{3}\cdot 2-\sqrt{36}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2-\sqrt{25}$
c) $\frac{2^{-2}}{3}\cdot 2-\sqrt{36}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot 2-\sqrt{25}$

28. a) Kiek dabar valandų, jeigu praėjusi paros dalis 3 kartus trumpesnė už likusią?
b) Kiek dabar valandų, jeigu likusi paros dalis 2 kartus trumpesnė už praėjusią?

29. Keturi saldainiai ir trys kivio vaisiai kainuoja 3 Lt 30 ct, o du saldainiai ir du kiviai — 2 Lt. Ar du saldainiai kainuoja tiek pat kiek vienas kivis?



3 TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS



1 Tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais

UŽDAVINYS. Ryčiui mama davė 14 litų ir paprašė *už visą šią sumą* nupirkti kriaušių ir obuolių. Parduotuvėje kilogramas kriaušių kainavo 4 litus, o kilogramas obuolių — 2 litus. Kiek kilogramų kriaušių ir kiek kilogramų obuolių galėjo nupirkti Rytis?

Surašykime Ryčio galimybes į lentelę:

Kriaušės (kg)	Obuoliai (kg)	Kainos apskaičiavimas (Lt)
1	5	$4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 14$
1,5	4	$4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 4 = 14$
2	3	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$
...	...	....
x	y	$4 \cdot x + 2 \cdot y = 14$

Kaip matome, negalima vienareikšmiškai atsakyti į uždavinio klausimą. Rytis galėjo nupirkti, pavyzdžiui, 1 kg kriaušių ir 5 kg obuolių arba 1,5 kg kriaušių ir 4 kg obuolių, bet negalėjo nupirkti 5 kg kriaušių ir 0,5 kg obuolių, nes tuomet $4 \cdot 5 + 2 \cdot 0{,}5 = 21 > 14$. Kriaušių kilogramų skaičių pažymėję x, o obuolių — y galime sudaryti lygtį su dviem nežinomaisiais $4x + 2y = 14$.

Tiesine lygtimi su dviem nežinomaisiais vadiname lygtį, kurią galima užrašyti pavidalu $ax + by = c$; čia x ir y — nežinomieji, a, b ir c — skaičiai.

Iš lentelės matome, kad lygties $4x + 2y = 14$ sprendiniai yra skaičių poros: $x = 1$, $y = 5$; $x = 1{,}5$, $y = 4$; $x = 2$, $y = 3$, nes su šiomis nežinomųjų reikšmėmis lygtis virsta teisinga lygybe.

Kad nereikėtų kiekvieną kartą rašyti $x = \ldots$ ir $y = \ldots$, susitarkime tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais x ir y sprendinį nurodyti kaip skaičių porą $(x; y)$, kurios pirmoje vietoje parašyta x reikšmė, o antroje — y reikšmė. Taigi lygties $4x + 2y = 14$ sprendiniai yra skaičių poros $(1; 5)$, $(1{,}5; 4)$ ir t. t.

Lygties su dviem nežinomaisiais sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, kuri paverčia tą lygtį teisinga skaitine lygybe.

1 užduotis. Įsitikinkite, kad skaičių poros $(-1; 9)$, $(0; 7)$ ir $(3{,}496; 0{,}008)$ yra lygties $4x + 2y = 14$ sprendiniai, bet nagrinėto tekstinio uždavinio sąlygos jos netenkina. Paaiškinkite, kodėl.

Išspręsti lygtį — reiškia rasti *visus* jos sprendinius arba įsitikinti, kad sprendinių nėra. Kaip rasti lygties su dviem nežinomaisiais sprendinius?

PAVYZDYS. Raskime kelis lygties $3x + y = 5$ sprendinius. Iš duotosios lygties išreikškime nežinomąjį y: $y = 5 - 3x$.
Laisvai pasirinkdami x reikšmes randame joms atitinkamas y reikšmes, pavyzdžiui:

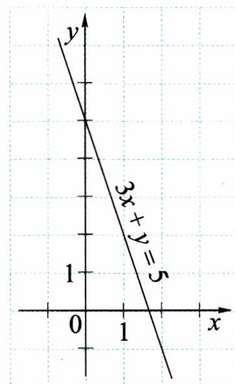
$$\text{jeigu } x = -1, \text{ tai } y = 5 - 3 \cdot (-1) = 8,$$
$$\text{jeigu } x = 0, \text{ tai } y = 5 - 3 \cdot 0 = 5,$$
$$\text{jeigu } x = \frac{2}{3}, \text{ tai } y = 5 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 3,$$
$$\text{jeigu } x = 2, \text{ tai } y = 5 - 3 \cdot 2 = -1, \text{ ir t. t.}$$

Radome šiuos lygties $3x + y = 5$ sprendinius: $(-1; 8)$, $(0; 5)$, $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$, $(2; -1)$. Analogiškai galime rasti kiek norint duotosios lygties sprendinių.

Akivaizdu, kad tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais turi *be galo daug* sprendinių.

Jei skaičių poras $(x; y)$, kurios yra tiesinės lygties $ax + by = c$ sprendiniai, pavaizduotume koordinačių plokštumoje taškais, kurių koordinatės yra x ir y, tai pastebėtume, kad visi taškai yra vienoje tiesėje.

Išreiškę y iš lygties $3x + y = 5$ gauname $y = -3x + 5$. Gautoji išraiška yra tiesinės funkcijos $y = kx + b$ formulė, kur $k = -3$, $b = 5$. Funkcijos $y = -3x + 5$ grafikas yra tiesė. Jis yra ir lygties $3x + y = 5$ grafikas. Nubrėžkime šią tiesę koordinačių plokštumoje atidėję bet kuriuos du taškus, kurių koordinatės yra duotosios lygties sprendiniai, pvz. $(0; 5)$, $(2; -1)$. Kiekvieno taško, priklausančio pavaizduotai tiesei, koordinatės yra lygties $3x + y = 5$ sprendiniai.



2 užduotis. Remdamiesi grafiku:
a) nurodykite dar dvi skaičių poras, kurios yra lygties $3x + y = 5$ sprendiniai;
b) pasakykite, ar skaičių pora $(-1; 2)$ yra šios lygties sprendinys.

Pratimai ir uždaviniai

281. Ar duotoji skaičių pora yra lygties $2x - y = 5$ sprendinys:

a) $x = 4,\ y = 3$ b) $x = -2,\ y = 1$
c) $x = 0,\ y = -5$ d) $x = 3,\ y = -1$?

282. Ar skaičių pora $\left(1\frac{1}{3}; 2\right)$ yra lygties $3x + y = 6$ sprendinys? Nurodykite dar du šios lygties sprendinius.

283. Duotos skaičių poros: (7; 0), (3; 1), (1; 3), (−1; 2), $\left(6; \frac{1}{4}\right)$. Kurios iš jų yra lygties $x + 4y = 7$ sprendiniai?

284. Raskite tokias x arba y reikšmes, kad skaičių pora būtų lygties $5x + 2y = 10$ sprendinys:

a) $(0; y)$; b) $(x; 0)$; c) $(4; y)$; d) $(x; -20)$.

285. Iš duotosios lygties išreiškę nežinomąjį y nežinomuoju x raskite po tris kiekvienos lygties sprendinius:

a) $5x + y = 10$ b) $3x + 2y = 6$ c) $10y - 7x = 0$
d) $x + \frac{y}{4} = 3$ *e) $1{,}2x - 0{,}4y = 2{,}8$ *f) $\frac{x+2}{3} - \frac{y-1}{6} = 5$

286. Sudarykite tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais, kurios sprendinys būtų nurodyta skaičių pora:

a) (3; 1); b) (0; 4); c) (−0,5; 2); d) $\left(\frac{2}{3}; 3\frac{1}{4}\right)$; e) (−1; 0).

Pavyzdys. Sudarykime tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais, kurios sprendinys būtų skaičių pora (2; 5).
Sprendimas. Lygties $ax + by = c$ koeficientus a ir b pasirenkame laisvai. Tegul $a = 3$, $b = 1$. Įstatę šias a ir b reikšmes į lygtį $ax + by = c$ gauname: $3x + y = c$. Skaičių c rasime vietoj x įstatę 2, o vietoj y įstatę 5: $3 \cdot 2 + 5 = c$, $11 = c$. Gavome lygtį $3x + y = 11$.
Analogiškai samprotaudami galime sudaryti be galo daug tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais, kurių sprendinys yra skaičių pora (2; 5), nes yra be galo daug skaičių a ir b pasirinkimo būdų.

---

287. Raskite po du lygties sprendinius ir nubrėžkite grafiką:

a) $3x + y = 2$ b) $2x - y = 4$
c) $3x + 4y = -4$ d) $4(x + y) - 5(x - y) = 3$
*e) $0x - y = 0$ *f) $(2x + 1)^2 - (4x^2 - 3y) = 8$

288. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras, kurios yra lygties $x + y = 5$ sprendiniai.

289. Raskite visus natūraliuosius lygties $x + 3y = 16$ sprendinius ir pažymėkite juos koordinačių plokštumoje.

290. Raskite visus natūraliuosius lygties $2x + y = 8$ sprendinius. Pažymėkite juos koordinačių plokštumoje ir nubrėžkite tiesę, kurioje yra visi šios lygties sprendiniai.

291. Saulius už 6 litus pirko sąsiuvinių ir pieštukų. Vienas sąsiuvinis kainuoja 2 Lt, o vienas pieštukas — 1 Lt.

a) Sudarykite tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais šiam uždaviniui išspręsti ir atsakykite, kiek sąsiuvinių ir kiek pieštukų galėjo nupirkti Saulius.

b) Nurodykite visus galimus Sauliaus pasirinkimus.

292. Justė taupė mesdama į taupyklę 50 ir 20 centų monetas. Per savaitę ji sutaupė 3 litus. Kiek kokių monetų galėjo būti taupyklėje? (Nurodykite visus galimus atvejus.)

293. Nebraižydami patikrinkite, ar taškas $(1; -8)$ priklauso tiesei $y = 5x - 3$.

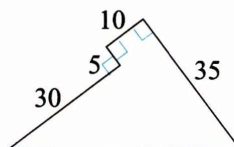
294. Ar lygties $7x - 5y = -1$ grafikas eina per tašką:

a) $(2; 3)$; b) $(0; -0{,}2)$?

295. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite lygčių $2y - x = 6$ ir $3x - 2y = 2$ grafikus ir nustatykite jų susikirtimo taško koordinates.

296. Raskite parabolės $y = ax^2$ koeficientą a, jeigu žinoma, kad parabolei priklauso taškas, kurio koordinatės yra:
a) $(5; 5)$; b) $(-4; 6)$.

297. Pagal brėžinio duomenis raskite figūros perimetrą ir plotą.



298. Ratas per minutę apsisuka 24 kartus. Kokiu kampu jis pasisuka per vieną sekundę?

A 60° **B** 90° **C** 120° **D** 144° **E** 160°

299. Stačiakampis, kurio kraštinės 10 cm ir 15 cm, sukamas apie vieną jo kraštinių. Raskite gauto ritinio viso paviršiaus plotą ir tūrį, jeigu stačiakampis sukamas apie:
a) ilgesniąją kraštinę; b) trumpesniąją kraštinę.

300*. Gamykla kiekvieną paskesnį mėnesį pagamindavo 230 detalių daugiau, negu prieš tai. Kiek detalių gamykla pagamino paskutinį mėnesį, jeigu per 4 mėnesius ji pagamino 5120 detalių?

301. Duoti du iracionalieji skaičiai $\sqrt{32}$ ir $\sqrt{8}$. Raskite jų:

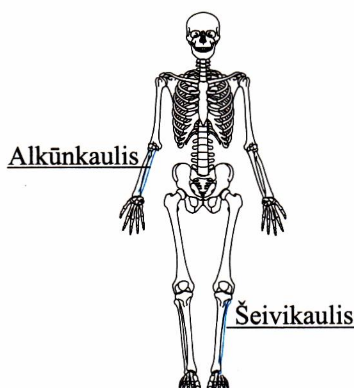
a) sumą;
b) skirtumą;
c) sandaugą;
d) dalmenį;
e) kvadratų skirtumą;
f) sumos ir skirtumo sandaugą;
g) dvigubą sumos kvadratą.

Pavyzdys. Iracionaliųjų skaičių $\sqrt{50}$ ir $\sqrt{18}$ suma lygi:
$\sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

---

302. Žmogaus ūgį archeologai gali nustatyti net pagal atskirus kaulus. Pavyzdžiui, šeivikaulio ilgis apytiksliai lygus 22% žmogaus ūgio, o alkūnkaulio — 16% žmogaus ūgio.

a) Kasinėjant rasti žmogaus palaikai, kurių šeivikaulio ilgis 39,3 cm. Kokio ūgio buvo žmogus?
b) Kaip galima pagrįsti, kad rastas 20,3 cm alkūnkaulis ir 38 cm šeivikaulis negali būti to paties žmogaus?



2 Tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos. Grafinis sprendimo būdas

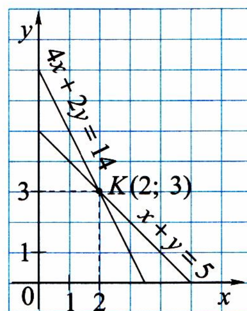
Papildykime 1 skyrelio uždavinio sąlygą ir suformuluokime ją taip:

UŽDAVINYS. Ryčiui mama davė 14 litų ir paprašė už visą šią sumą nupirkti kriaušių ir obuolių. Parduotuvėje kilogramas kriaušių kainavo 4 litus, o kilogramas obuolių — 2 litus. Kiek kilogramų kriaušių ir kiek kilogramų obuolių nupirko Rytis, *jeigu iš viso buvo nupirkta* 5 *kg vaisių*?

	Pirkta (kg)	Vieno kg kaina (Lt)	Sumokėta (Lt)
Kriaušės	x	4	$4x$
Obuoliai	y	2	$2y$
Iš viso	5		14

Šiam uždaviniui išspręsti galime sudaryti dvi lygtis:
lygtį $4x + 2y = 14$ sudarėme 1 skyrelyje;
naująją informaciją (*iš viso buvo nupirkta* 5 *kg vaisių*) atitiks lygtis $x + y = 5$.

Vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžkime tieses, kurių taškų koordinatės atitinkamai yra lygčių $4x + 2y = 14$ ir $x + y = 5$ sprendiniai.
Mus domina tik tos tiesių dalys (atkarpos), kurios yra pirmajame ketvirtyje, nes neigiamos x ir y reikšmės netenkina uždavinio sąlygos.
Iš brėžinio matome, kad tiesės susikerta taške $K(2; 3)$.
Šio taško koordinatės yra ir vienos, ir kitos lygties sprendinys.



Iš tikrųjų, kai $x = 2$ ir $y = 3$, tai $4x+2y = 4\cdot2+2\cdot3 = 14$ ir $x+y = 2+3 = 5$. Taigi nors lygtys $4x + 2y = 14$ ir $x + y = 5$ kiekviena atskirai turi daug sprendinių, yra tik vienas *bendras* jų abiejų sprendinys (2; 3). Lieka vienintelė galimybė: Rytis nupirko 2 kg kriaušių ir 3 kg obuolių.

Tuo atveju, kai kartu sprendžiame dvi tiesines lygtis ir ieškome bendrų jų sprendinių, sakome, kad sprendžiame dviejų *tiesinių lygčių sistemą*. Tiesinių lygčių sistemoms žymėti vartojame riestinį skliaustą $\{$.

Užrašas

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14, \\ x + y = 5 \end{cases}$$

reiškia dviejų tiesinių lygčių sistemą.

Apskritai dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases}$$ čia x ir y — nežinomieji, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — bet kokie skaičiai.

Spręsdami lygčių sistemą ieškome jos sprendinių — tokių skaičių porų, kurios *ir vieną, ir kitą* lygtį paverčia teisinga skaitine lygybe.

Lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, kuri yra kiekvienos lygties sprendinys.

? Ar skaičių pora (4; 1); (0; 3) yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

sprendinys?

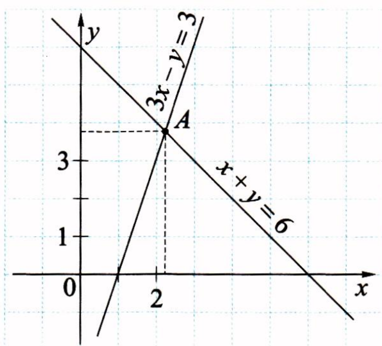
Lygčių sistemas galima spręsti grafiniu būdu:

- vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžiame duotųjų lygčių grafikus — tieses;
- iš brėžinio nustatome tiesių susikirtimo taško koordinates, kurios ir yra lygčių sistemos sprendinys.

Spręsdami grafiškai lygčių sistemos sprendinius ne visada galime rasti tiksliai.

PAVYZDYS. Grafiškai išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + y = 6. \end{cases}$$



Sprendimas. Vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžkime tieses $3x - y = 3$ ir $x + y = 6$. Šių tiesių susikirtimo tašką pažymėkime A ir raskime jo koordinates. Jas iš brėžinio galime nustatyti tik apytiksliai: $x \approx 2{,}3$, $y \approx 3{,}8$.

Atsakymas. $x \approx 2{,}3$, $y \approx 3{,}8$.

Pratimai ir uždaviniai

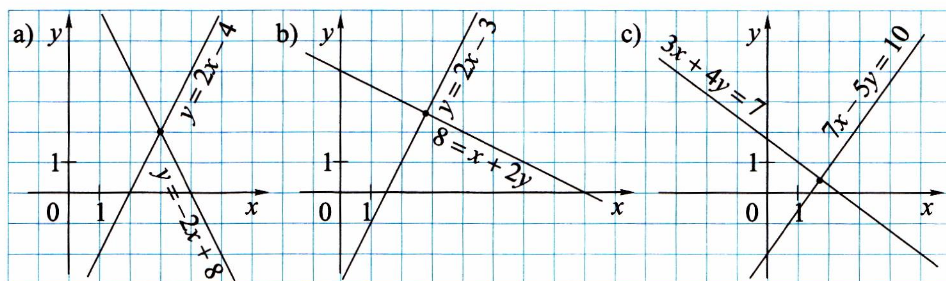
303. Ar duotoji skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ sprendinys:
a) (3; 1); b) (−1; 3)?

304. Kurios iš skaičių porų (−3; 4), (2; 6), (−4; 3) yra lygčių sistemos sprendiniai:

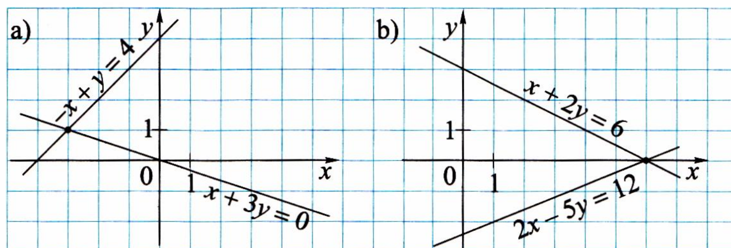
a) $\begin{cases} 3x - y = 0, \\ 5x - y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 3x + 4y = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y - x = 7? \end{cases}$

305. Sudarykite lygčių sistemą, kurios sprendinys būtų duotoji skaičių pora:
a) (5; 2); b) (0; −3); c) (1; 0); d) (−1; −3).

306. Iš brėžinio (apytiksliai) nustatykite tiesių susikirtimo taško koordinates:



307. Naudodamiesi pateiktu grafiku parašykite atitinkamą lygčių sistemą, nustatykite jos sprendinį:



308. a) Ar lygčių $x - 2y = 3$ ir $2x - 3y = 8$ grafikai eina per tašką $A(7; 2)$?
b) Ar šių lygčių grafikai eina per tašką $B(1; -1)$?
c) Kuris iš nurodytų taškų — A ar B — yra lygčių sistemos $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ sprendinys?

309. Nubrėžkite tieses ir raskite jų susikirtimo taško koordinates:

a) $x + 2y = -9$ ir $x - y = 6$ b) $x + y = 6$ ir $y = \frac{1}{2}x$
c) $3y + 15 = 6x$ ir $2y + 4x = 18$ d) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = 1$ ir $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$

310. Išspręskite tiesinių lygčių sistemas grafiškai:

a) $\begin{cases} y = x, \\ y + x = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -3, \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ *c) $\begin{cases} x + y = 350, \\ 5x + 2y = 910 \end{cases}$

311. Tiesės $y - x = 4$, $x + y = 10$ ir $y = 2$ apriboja trikampį. Nubraižykite šį trikampį ir apskaičiuokite jo plotą.

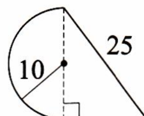
312*. Tiesės $y - x = -2$, $y + x = 2$, $y - x = -6$, $y + x = -4$ apriboja stačiakampį. Nubraižykite šį stačiakampį ir apskaičiuokite jo plotą.

313. Nebraižydami įrodykite, kad tiesės $4x + y = -5$ ir $-2x + 7y = 25$ eina per tašką $P(-2; 3)$.

314. Vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžkite tiesę, lygiagrečią x ašiai ir einančią per tašką $(4; 3)$, bei tiesę, lygiagrečią y ašiai ir einančią per tašką $(-3; -2)$. Kokiame taške kertasi šios tiesės? Užrašykite šių tiesių lygtis.

315*. Braižydami raskite hiperbolės $y = -\frac{4}{x}$ ir parabolės susikirtimo taškų koordinates, jei parabolės lygtis yra: a) $y = -\frac{1}{2}x^2$; b) $y = \frac{1}{2}x^2$.

316. Pagal brėžinio duomenis raskite figūros perimetrą ir plotą.



317. Naudodamiesi matlankiu nubrėžkite tiesę, einančią per tašką:
a) $(-2; 0)$ ir su teigiamąja x ašies kryptimi sudarančią 35° kampą;
b) $(3; 0)$ ir su teigiamąja x ašies kryptimi sudarančią 140° kampą.

318. Suapvalinkite skaičių iki vienetų, raskite apvalinimo absoliučiąją ir santykinę paklaidas: a) 1,2; b) 9,6; c) 0,66; d) 15,3.

319. Duoti reiškiniai $x + 2$ ir $x - 1$. Raskite:
a) jų sumą; b) jų skirtumą; c) jų sandaugą;
d) dvigubo pirmojo ir antrojo sumą;
e) pirmojo ir trigubo antrojo skirtumą;
*f) keturgubo pirmojo ir pusės antrojo skirtumą.

320. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $b(a - c) + c - a$ b) $7a + an - 7b - bn$
c) $3y^3 - 2y^2 + 3y - 2$ *d) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx$

321. Kiek procentų pabrango prekė, jei ji, anksčiau kainavusi 92 Lt, dabar kainuoja: a) 110,4 Lt; b) 106,72 Lt?

322. 8 papūgos per 8 dienas sulesa 8 kg lesalo. Kiek lesalo reikia vienai papūgai per vieną dieną?
A 100 g **B** 125 g **C** 150 g **D** 175 g **E** 200 g

3 Keitimo būdas

Spręsdami lygčių sistemas grafiškai dažniausiai randame tik apytikslį sprendinį. Tikslių sprendinių ieškome algebriniais būdais — keitimo ir sudėties.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą (tą pačią, kaip 2 skyrelyje)

$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + y = 6 \end{cases}$$

keitimo būdu.

1) Iš antrosios lygties nežinomąjį y išreiškiame nežinomuoju x: $y = 6 - x$.

2) Į pirmąją lygtį vietoj y įrašome reiškinį $6 - x$:

$$3x - (6 - x) = 3.$$

Gavome lygtį su vienu nežinomuoju. Išsprendžiame ją:

$$3x - 6 + x = 3,$$
$$4x = 9,$$
$$x = 2{,}25.$$

3) Šią x reikšmę įrašome į lygtį $y = 6 - x$ ir gauname y reikšmę:

$$y = 6 - x,$$
$$y = 6 - 2{,}25,$$
$$y = 3{,}75.$$

Skaičių pora $(2{,}25; 3{,}75)$ yra sistemos

$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + y = 6 \end{cases}$$

sprendinys. Praėjusiame skyrelyje spręsdami grafiškai mes spėjome, kad atsakymai yra $x \approx 2{,}3$ ir $y \approx 3{,}8$. Įstatę $x = 2{,}25$ ir $y = 3{,}75$ į abi sistemos lygtis įsitikiname, kad dabar radome tikslų sprendinį:

$$3x - y = 3 \cdot 2{,}25 - 3{,}75 = 6{,}75 - 3{,}75 = 3;$$
$$x + y = 2{,}25 + 3{,}75 = 6.$$

Atsakymas. $(2{,}25; 3{,}75)$.

Šį būdą ypač patogu taikyti tada, kai bent vienoje lygtyje koeficientas prie x ar y lygus 1 arba -1.

? Paaiškinkite, kodėl.

2 PAVYZDYS. Išspręskime keitimo būdu lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x + 3y = 11, \\ 7x + 4y = 16. \end{cases}$$

1) Iš antrosios lygties išreikškime nežinomąjį y:

$$4y = 16 - 7x, \quad y = \frac{16 - 7x}{4}.$$

2) Įrašykime šį reiškinį vietoj y į pirmąją sistemos lygtį:

$$5x + 3 \cdot \frac{16 - 7x}{4} = 11 \Big| \cdot 4,$$
$$20x + 3 \cdot (16 - 7x) = 44,$$
$$20x + 48 - 21x = 44,$$
$$x = 4.$$

3) Į lygtį $y = \frac{16-7x}{4}$ vietoj x įrašę 4 gauname:

$$y = \frac{16 - 7 \cdot 4}{4}, \quad y = -3.$$

Atsakymas. (4; −3).


Įsitikinkite, kad skaičių pora (4; −3) yra nagrinėtosios sistemos sprendinys.

Kartais patogu išreikšti ne y ar x, bet by ar ax, kur a ir b nelygūs 0 skaičiai.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 2x - 5y = -6. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad čia geriausiai išreikšti $2x$ iš pirmosios arba antrosios lygties. Išreikškime $2x$ iš pirmosios lygties: $2x = 2 + 3y$. Įstatykime reiškinį $2 + 3y$ vietoj $2x$ į antrąją lygtį: $(2 + 3y) - 5y = -6$, $y = 4$. Į lygtį $2x = 2 + 3y$ vietoj y įrašę 4 gauname: $2x = 2 + 3 \cdot 4$, $2x = 14$, $x = 7$.
Atsakymas. (7; 4).

Spręsdami lygčių sistemą *keitimo* būdu:

- vienos lygties kurį nors nežinomąjį išreiškiame kitu;
- įrašome gautąją išraišką į kitą lygtį ir išsprendžiame lygtį su vienu nežinomuoju;
- randame antrojo nežinomojo reikšmę.

Pratimai ir uždaviniai

323. Išspręskite lygčių sistemas keitimo būdu:

a) $\begin{cases} y = 3x + 2, \\ 2y - 5x = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 - y, \\ 3x + 4y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - y = 0, \\ y = x - 1. \end{cases}$

324. Išreikškite nežinomąjį y nežinomuoju x, taip pat nežinomąjį x išreikškite nežinomuoju y:

a) $x + y = 3$ b) $4x - y = 6$ c) $2x + 5y = 10$

d) $-0{,}5x + 3y = 2$ e) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4$ f) $0{,}3x + 0{,}6y = 0{,}2$

325. Išreiškę vieną nežinomąjį kitu išspręskite lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 6x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ x + 7y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ 7x + 5y = 33 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -9, \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + y = 0, \\ x + 2y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 14y = 84, \\ 2x - 7y = -7 \end{cases}$

*g) $\begin{cases} \frac{x}{4} - y = -6, \\ 4x + 7y = -4 \end{cases}$ *h) $\begin{cases} 2a - 3b = 3, \\ a - \frac{b}{2} = 2 \end{cases}$ *i) $\begin{cases} m - \frac{n}{2} = 4, \\ 3m - 2n = -15 \end{cases}$

326. Raskite lygčių sistemų sprendinius:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 31, \\ 3x - 3y = 36 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4y - 20 = 4x, \\ 3y - 11 = 4x \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x - 3y = 6, \\ 5x + 75 = 15y \end{cases}$

d) $\begin{cases} -5x - y = -32, \\ 2y - 5x = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y + z = -54, \\ x = -6y, \\ z = 14y \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 17, \\ y = -3z - 7, \\ 2x = z + 2 \end{cases}$

327. Nebraižydami grafikų raskite funkcijų grafikų susikirtimo taško koordinates:

a) $y = x - 1$ ir $y = 3x + 3$; b) $y = \frac{1}{2}x$ ir $y = 6 - x$.

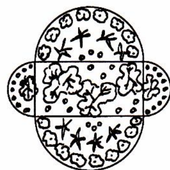
328. Dviejų skaičių suma lygi 56, o skirtumas lygus 14. Raskite tuos skaičius.

329. Už 3 storus ir 4 plonus sąsiuvinius Simas sumokėjo 8 litus. Kiek kainavo storas sąsiuvinis ir kiek plonas, jei žinoma, kad plonas sąsiuvinis 1,5 lito pigesnis už storą?

330. Turistas 2 valandas važiavo miško keliu ir 1 valandą plentu. Iš viso jis nuvažiavo 28 km. Kokiu greičiu turistas važiavo miško keliu ir kokiu greičiu — plentu, jeigu jo greitis plentu buvo 4 km/h didesnis už greitį miško keliu?

331. Trikampio dviejų kampų skirtumas lygus 24°, o trečias kampas — 40°. Raskite kitus du trikampio kampus.

332. Brėžinyje pateiktas gėlyno planas. Koks kiekvieno pusskritulio spindulys, jei didesniojo pusskritulio spindulys 3 m ilgesnis už mažesniojo, o stačiakampio perimetras lygus 68 m?



333. Tadas sutaupė 23 litus mesdamas į taupyklę 20 ir 50 centų vertės monetas. Kiek kokios vertės monetų jis turi, jei žinoma, kad yra 70 monetų?

334. Juvelyrui prireikė 200 gramų 45% vario lydinio. Jis turi 30% ir 50% vario lydinio. Kiek kiekvienos rūšies lydinio jam reikia sumaišyti?

335. Arnas 10 metų vyresnis už Donatą. Prieš 12 metų Arnas buvo 3 kartus vyresnis už Donatą. Kiek metų dabar yra Arnui ir kiek Donatui?

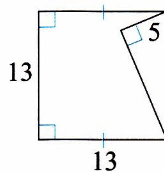
336. Lėktuvas 960 km pavėjui nuskrido per 3 h, o prieš vėją tą patį atstumą — per 4 h. Koks savasis lėktuvo greitis ir koks vėjo greitis? (Tarkime, kad vėjo kryptis nesikeitė.)

337. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 12. Jei jo vienetų skaitmenį padaugintume iš 6, tai gautume tą dviženklį skaičių. Raskite jį.
Pastaba. Kiekvieną dviženklį skaičių galima užrašyti pavidalu $10x + y$, kur x yra dešimčių skaitmuo, o y — vienetų skaitmuo. Pavyzdžiui, $52 =$
$= 10 \cdot 5 + 2$.

338. Raskite aritmetinės progresijos 2, 5, 8, ... :
a) 10-ąjį; b) 15-ąjį; c) 23-iąjį; d) 34-ąjį narį.

339. Nubraižykite funkcijos $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ grafiką ir nurodykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės:
a) yra neigiamos; b) yra teigiamos; c) didėja; d) mažėja.

340. Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite figūros perimetrą ir plotą.



341. Kūgio sudaromoji lygi 4 dm, o pagrindo skersmuo — 4,8 dm.
a) Raskite kūgio aukštinę.
*b) Koks šio kūgio ašinio pjūvio (lygiakraščio trikampio, kurio aukštinė sutampa su kūgio aukštine) plotas?

342. Trijose mokyklose yra 386 pirmūnai. Kiek pirmūnų yra kiekvienoje mokykloje, jeigu pirmoje yra 38 pirmūnais daugiau, negu antroje, o trečioje 26 pirmūnais mažiau, negu pirmoje mokykloje?

343. Kiek mažiausiai vaikų yra šeimoje, jeigu kiekvienas vaikas turi bent vieną seserį ir bent du brolius?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

4 Sudėties būdas

1 UŽDAVINYS. Stačiakampio formos sklypo perimetras yra 27 metrai. Jo ilgis 3 metrais didesnis už dvigubą plotį. Kokie sklypo matmenys?

Sprendimas. Šiam uždaviniui išspręsti galime sudaryti lygčių sistemą. Sakykime, sklypo ilgis yra x m, o plotis — y m. Tada

$$\begin{cases} 2x + 2y = 27, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad abiejų lygčių koeficientai prie y yra vienas kitam priešingi skaičiai (2 ir -2). Tokiais atvejais sprendžiant lygčių sistemą patogu taikyti sudėties būdą, kurio esmė — vieno nežinomojo pašalinimas sudedant lygtis. Išspręskime sudarytą lygčių sistemą sudėties būdu. Panariui sudėkime abi lygtis:

$$+\begin{cases} 2x + 2y = 27, \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\overline{2x + x + 2y - 2y = 27 + 3.}$$

Iš čia gauname ir išsprendžiame lygtį su vienu nežinomuoju:

$$3x = 30,$$
$$x = 10.$$

Šią x reikšmę įstatę į bet kurią (geriau paprastesnę) sistemos lygtį randame y reikšmę:

$$x - 2y = 3,$$
$$10 - 2y = 3,$$
$$2y = 7,$$
$$y = 3{,}5.$$

Sistemos sprendinys (10; 3,5). Vadinasi, sklypo ilgis yra 10 m, o plotis — 3,5 m. Iš tikrųjų, $2 \cdot 10 + 2 \cdot 3{,}5 = 27$ ir $10 - 2 \cdot 3{,}5 = 3$.

Atsakymas. 10 m; 3,5 m.

2 UŽDAVINYS. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x - 2y = 24, \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$$

sudėties būdu.

Sprendimas. Pastebėsime, kad čia koeficientai nei prie x, nei prie y nėra vienas kitam priešingi skaičiai. Todėl sudėję lygtis nepašalintume nei vieno nežinomojo. Tačiau pirmąją lygtį padauginę iš -2 ir sudėję su antrąja galime pašalinti nežinomąjį y:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 24 \,|\cdot(-2), \\ 3x - 4y = 20, \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -10x + 4y = -48, \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$$

$$-7x = -28,$$
$$x = 4.$$

Gautąją x reikšmę įstatome į bet kurią sistemos lygtį, pavyzdžiui, $3x - 4y = 20$, ir gauname y:

$$3 \cdot 4 - 4y = 20,$$
$$-4y = 8,$$
$$y = -2.$$

Pasitikriname, ar skaičių pora $(4; -2)$ yra duotosios lygčių sistemos sprendinys:

$$5x - 2y = 24, \quad 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 20 + 4 = 24,$$
$$3x - 4y = 20, \quad 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) = 12 + 8 = 20.$$

Atsakymas. $(4; -2)$.

Spręsdami tiesinių lygčių sistemą sudėties būdu:

- pasirenkame nežinomąjį, kurį pašalinsime;
- vieną (arba abi) sistemos lygtį dauginame iš tokio skaičiaus, kad koeficientai prie vieno nežinomojo būtų vienas kitam priešingi skaičiai;
- panariui sudedame abi sistemos lygtis;
- išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju;
- randame antrojo nežinomojo reikšmę.

? Ar padauginus iš kokių nors skaičių abi lygtis, koeficientai prie abiejų nežinomųjų gali pasidaryti vienas kitam priešingi skaičiai? Pakomentuokite šį atvejį.

Pratimai ir uždaviniai

344. Išspręskite lygčių sistemas sudėties būdu:

a) $\begin{cases} 6x - 5y = 8, \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 17y = 4, \\ -8x + 15y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 5y = 12, \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 8y = 28, \\ 11x - 8y = 24 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 15x - 3y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 12x - 7y = 2, \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 7x + 4y = -4, \\ 5x + 8y = 28 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 9x + 2y = -12 \end{cases}$

345. Išspręskite lygčių sistemas pašalindami vieną nežinomąjį:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 2y - 5x = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y - 12 = 0, \\ 4x - 5y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x + 12y = 7, \\ 8x - 15y + 1 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x + 6y = -20, \\ 9y + 2x = 25 \end{cases}$

Pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y = -8, \\ 3x - 4y = 5. \end{cases}$$

Sprendimas. Norint pašalinti kurį nors nežinomąjį iš atitinkamų dauginamųjų patogu dauginti abi lygtis.
Jei norime pašalinti x, tai pirmąją lygtį dauginame iš -3, o antrąją — iš 2 (jei šalintume y, tai pirmąją lygtį dangintume iš 4, o antrąją — iš 3).

$$\begin{cases} 2x + 3y = -8 \,|\cdot(-3), \\ 3x - 4y = 5 \,|\cdot 2, \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -6x - 9y = 24, \\ 6x - 8y = 10, \end{cases}$$

$$-17y = 34,$$
$$y = -2.$$

Įstatome šią y reikšmę į pirmąją lygtį ir randame x reikšmę: $2x + 3y = -8$, $2x + 3\cdot(-2) = -8$, $x = -1$.

Atsakymas. $(-1; -2)$.

---

346. Nebraižydami grafikų įrodykite, kad tiesės:
a) $3x - 4y = 1$ ir $4x - 6y = 3$ susikerta taške $(-3; -2{,}5)$;
b) $2x - 5y = 2$ ir $3x - 2y = -8$ susikerta taške $(-4; -2)$.

347. Išspręskite lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 4, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{1}{4}y = 11, \\ \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 500, \\ 0{,}7x + 0{,}2y = 550 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}6y = 0, \\ 0{,}4x + 1{,}7y = 10{,}9 \end{cases}$

*e) $\begin{cases} 0{,}25(x + 4y) = 3{,}5, \\ 0{,}5x - 0{,}25y = 1 \end{cases}$ *f) $\begin{cases} y - 4x + 100 = 0, \\ 0{,}06y - 0{,}05x = 32 \end{cases}$

348. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 3x + y = -8, \\ x + 6y = 3 \end{cases}$

a) grafiniu būdu; b) sudėties arba keitimo būdu.

349. Parašykite pavidalo $y = kx + b$ tiesės lygtį, kad tiesė eitų per taškus:
a) $A(1; 2)$ ir $B(-2; 3)$; b) $M(-1; 1)$ ir $N(4; 4)$.

350. Raskite tokį tiesės $3x - 5y = 72$ tašką, kad jo ordinatė būtų:
a) lygi abscisei; b) priešinga abscisei; c) lygi dvigubai abscisei.

351. Už 4 pieštukus ir 3 sąsiuvinius Rita sumokėjo 7 litus, o Marytė už 3 tokius pat pieštukus ir 2 sąsiuvinius sumokėjo 4,9 lito. Kiek kainavo vienas pieštukas ir kiek vienas sąsiuvinis?

352. Mokyklos dailės kabinetui buvo nupirkta 12 rinkinių akvarelinių dažų ir 5 rinkiniai guašo. Už pirkinį sumokėta 112 litų. Penki akvarelinių dažų rinkiniai brangesni už 2 guašo rinkinius 14 litų. Kiek kainavo vienas rinkinys akvarelinių dažų ir kiek vienas rinkinys guašo?

353. Maksimalus katerio greitis upe pasroviui yra 30 km/h, o prieš srovę — 22 km/h. Koks būtų maksimalus katerio greitis ežere?

354. Pėstysis atstumą nuo stoties iki gyvenvietės nuėjo per 5 h, o dviratininkas šį atstumą nuvažiavo per 2 h. Dviratininko greitis yra 6 km/h didesnis už pėsčiojo greitį. Raskite pėsčiojo ir dviratininko greitį.

355. Už pirkinį, kainavusį 37 litus, pirkėja atsiskaitė 2 ir 5 litų vertės monetomis. Kiek kokios vertės monetų ji davė kasininkei, jei žinoma, kad dviejų litų vertės monetų buvo viena daugiau nei penkių litų?

356. Dviejų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 28. Pusė vieno skaičiaus lygi trigubam kitam skaičiui. Raskite tuos skaičius.

357. 6 bandelės ir 4 stiklinės gėrimo kainavo 6,4 Lt, o tokios pačios 4 bandelės ir 4 stiklinės gėrimo — 4,8 Lt. Kiek kainuoja viena bandelė ir kiek viena stiklinė gėrimo?

358. Traukinys vieną kelio ruožą nuvažiavo per 2 h, o kitą — per 3 h. Iš viso jis nuvažiavo 330 km. Kokiu greičiu traukinys važiavo kiekvieną kelio ruožą, jei antrąjį jis važiavo 10 km/h didesniu greičiu, nei pirmąjį?

359. Valtis 80 km atstumą pasroviui nuplaukia per 4 h, o prieš srovę — per 5 h. Raskite valties savąjį greitį ir upės tėkmės greitį.

360. Dviejose lentynose yra 110 knygų. Jei iš antrosios lentynos pusę knygų perdėtume į pirmąją, tai pirmojoje būtų 4 kartus daugiau knygų, negu liko antrojoje. Kiek knygų buvo kiekvienoje lentynoje iš pradžių?

361. Pajūrio viešbučio reklamoje turistams skelbiama:

3 pietūs ir *2 nakvynės* pas mus kainuoja **210 litų**

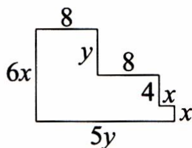
4 pietūs ir **3 nakvynės** – tik ***300 litų!***
Skubėkite, vietų dar yra!

Kiek kainuoja vieneri pietūs ir kiek viena nakvynė pajūrio viešbutyje?

362. Dviejų skaičių suma lygi 77. Raskite tuos skaičius, jei žinoma, kad $\frac{2}{3}$ vieno skaičiaus lygios $\frac{4}{5}$ kito skaičiaus.

363. Jūrų keltas plukdo 19 dviejų rūšių automobilių. Vienos rūšies automobiliai sveria po 1300 kg, o kitos — po 2200 kg. Bendra visų automobilių masė yra 31 t. Raskite, kiek lengvesnių automobilių plukdo keltas?

364. Apskaičiuokite figūros perimetrą sudarę lygčių sistemą.



365. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 15. Jei jo skaitmenis sukeistume vietomis, tai gautas skaičius būtų 9 vienetais mažesnis už pradinį. Raskite pradinį skaičių.

366. Vienas iš dviejų gretutinių kampų $36°$ didesnis už kitą. Raskite tuos kampus.

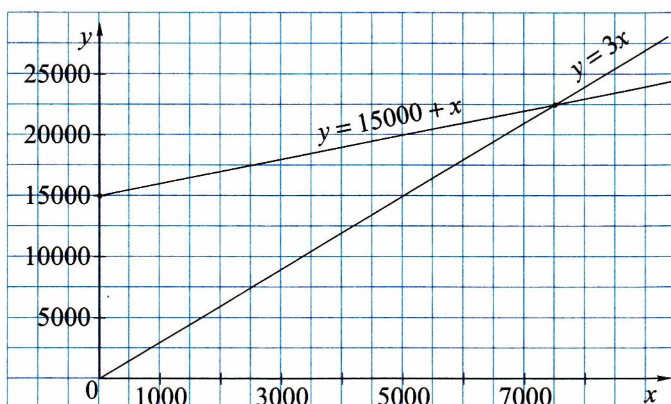
367. Apskaičiuokite:

a) $\frac{\frac{1}{6}+1{,}3}{5{,}6\cdot\frac{1}{7}}$; b) $\sqrt{16} : 3^{-1} + \sqrt{4^0 + \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}}$.

368. Parašykite penkis pirmuosius aritmetinės progresijos (a_n) narius, kai:
a) $a_1 = 2$, $d = 3$; b) $a_1 = 10$, $d = -2$.

369. Trikampio dvi kraštinės yra 25 cm ir 30 cm. Aukštinė, nubrėžta į trečią kraštinę, lygi 24 cm. Raskite:
a) trečios kraštinės atkarpas, į kurias ją dalija aukštinė;
b) trikampio trečios kraštinės ilgį;
c) trikampio perimetrą ir plotą;
*d) kitas trikampio aukštines.

370. Įmonė gamina tualetinį muilą. Gamybos išlaidos yra 15 000 litų per metus. Muilo vieno gabalėlio pagaminimo išlaidos — 1 litas, o pardavimo kaina — 3 litai. Pateiktame brėžinyje tiesė $y = 15\,000 + x$ vaizduoja visas įmonės išlaidas, o tiesė $y = 3x$ — įplaukas, t. y. pinigų sumą, gautą pardavus pagamintą muilą. Remdamiesi grafiku atsakykite į klausimus.
a) Kiek mažiausiai muilo gabalėlių per metus reikia parduoti, kad gamyba nebūtų nuostolinga?
b) Koks pelnas gaunamas pardavus 8000 muilo gabalėlių?

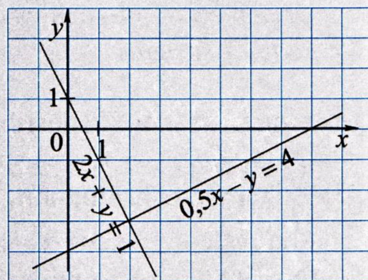


371*. Įmonė planuoja pradėti gaminti naują gaminį. Numatyta, kad gamybos išlaidos sudarys 15 000 litų, o gaminio vieno vieneto išlaidos bus 3 litai. Įmonė ketina nustatyti 8 litų gaminio pardavimo kainą.
a) Grafiškai pavaizduokite, kaip įmonės visos išlaidos ir įplaukos priklauso nuo apyvartos.
b) Kiek mažiausiai gaminių reikia parduoti, kad gamyba pradėtų duoti pelną?
c) Kokią mažiausią gaminio pardavimo kainą reikia nustatyti, kad įmonė nepatirtų nuostolių pardavusi 2500 vnt. gaminių?

5 Kiek sprendinių turi dviejų tiesinių lygčių sistema?

Lig šiol nagrinėjome pavyzdžius, kai dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos turi vieną sprendinį. Ar visada taip yra? Kadangi dviejų tiesinių lygčių sistemos sprendinys yra dviejų tiesių susikirtimo taškas, tai šis klausimas reiškia: ar visada dvi tiesės kertasi viename taške?
Žinome, kad dvi tiesės dar gali būti lygiagrečios (tada lygčių sistema sprendinių neturės) arba sutampančios (tada lygčių sistema turės be galo daug sprendinių). Panagrinėkime visus tris atvejus.

I. Išsiaiškinkime, kiek sprendinių turi lygčių sistema $\begin{cases} 0{,}5x - y = 4, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$



Norėdami tai padaryti turime nustatyti tiesių — sistemos lygčių grafikų — tarpusavio padėtį. Tam kiekvienos lygties nežinomąjį y išreikškime nežinomuoju x:

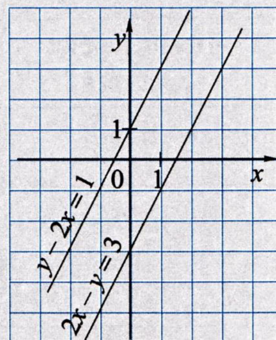
$$\begin{cases} y = 0{,}5x - 4, \\ y = -2x + 1. \end{cases}$$

Matome, kad šiuo atveju abiejų tiesių krypties koeficientai yra skirtingi: $k_1 = 0{,}5$, $k_2 = -2$. Taigi $k_1 \neq k_2$. Žinome, kad tokios tiesės susikerta, vadinasi, tiesinių lygčių sistema turi *vienintelį sprendinį*.

II. Išsiaiškinkime, kiek sprendinių turi lygčių sistema $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

Kiekvienos lygties nežinomąjį y išreikškime nežinomuoju x:

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$



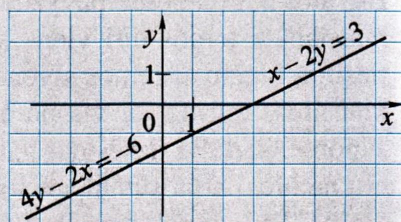
Tiesių $y = 2x + 1$ ir $y = 2x - 3$ krypties koeficientai yra vienodi: $k_1 = k_2 = 2$, o susikirtimo su y ašimi taškai skirtingi: $b_1 = 1$, $b_2 = -3$. Taigi $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$.
Tokios tiesės yra lygiagrečios, vadinasi, nagrinėjama lygčių sistema *sprendinių neturi*.

III. Išsiaiškinkime, kiek sprendinių turi lygčių sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 4y - 2x = -6. \end{cases}$$

Nežinomąjį y išreikškime nežinomuoju x:

$$\begin{cases} y = 0,5x - 1,5, \\ y = 0,5x - 1,5. \end{cases}$$



Abiejų tiesių krypties koeficientai yra vienodi: $k_1 = k_2 = 0,5$. Taip pat vienodi ir susikirtimo su y ašimi taškai: $b_1 = b_2 = -1,5$. Taigi $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$.

Akivaizdu, kad šiuo atveju lygčių grafikai sutampa. Nubrėžtosios tiesės kiekvieno taško koordinatės yra tos sistemos sprendinys. Vadinasi, sistema turi *be galo daug sprendinių*.

Užduotis. Naudodamiesi brėžiniu nurodykite:

a) keletą lygčių sistemos sprendinių;

b) keletą tokių skaičių porų, kurios nėra duotosios lygčių sistemos sprendiniai.

Svarbu įsidėmėti, kad pasakymas „be galo daug sprendinių“ nereiškia, kad bet kaip parinkta skaičių pora yra lygčių sistemos sprendinys. Jei x-ui priskirsime kurią nors reikšmę t (rašysime $x = t$, $t \in \boldsymbol{R}$), tai $y = 0,5t - 1,5$.

Atsakymą rašysime taip: $(t; 0,5t - 1,5)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Išvadas apie dviejų tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

sprendinių skaičių pateikiame šioje lentelėje:

Tiesių lygčių ypatybės	Lygčių sistemos sprendinių skaičius	Tiesių tarpusavio padėtis
$k_1 \neq k_2$	Vienas sprendinys	Kertasi
$k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$	Nėra sprendinių	Lygiagrečios
$k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$	Be galo daug sprendinių	Sutampa

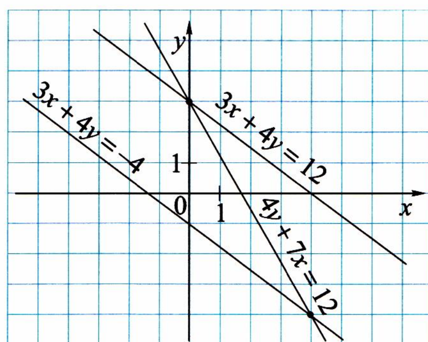
Pratimai ir uždaviniai

372. Iš brėžinio nustatykite šių lygčių sistemos sprendinių skaičių:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ 4y + 7x = 12; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ 3x + 4y = -4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4y + 7x = 12, \\ 3x + 4y = -4. \end{cases}$



373. Nubraižykite visų trijų lygčių grafikus vienoje koordinačių plokštumoje. Sudarykite visas galimas dviejų tiesinių lygčių sistemas. Naudodamiesi grafiku nustatykite tų sistemų sprendinių skaičių:

a) $y + 2x = 0, \quad 2y - 3x = 6, \quad y = 3 - 2x;$

b) $2y = x - 4, \quad x + 4y = 4, \quad 8y = 8 - 2x.$

374. Įrodykite, kad tiesės $x + y = 5$, $2x - y = 16$ ir $x + 2y = 3$ susikerta viename taške. Nurodykite to taško koordinates.

375. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} y + 3x = 0, \\ x - y = 4, \\ x + y = -2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ x - 2y = 2, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$

376. Kiekvieną sistemos lygtį užrašykite pavidalu $y = kx + b$. Nustatykite lygčių sistemos sprendinių skaičių:

a) $\begin{cases} 3y + 2x = 12, \\ 6x + 9y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x = 4y - 8, \\ 6x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 3y = 24, \\ 10x - 16y = -34 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 8y = 4, \\ 6x - 42 = 16y \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 4, \\ x = -\frac{3}{8}y + 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 5y = 30, \\ x - 1{,}25y = 2{,}5 \end{cases}$

377. Su kuria kintamojo a reikšme tiesės $5x - 2y = 3$ ir $x + y = a$ susikerta taške, priklausančiame:

a) y ašiai; b) x ašiai?

378. Parinkite tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais, kuri su lygtimi $6x+3y = 1$ sudarytų sistemą:

a) turinčią vieną sprendinį; b) turinčią be galo daug sprendinių;

c) neturinčią sprendinių; d) turinčią sprendinį $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

379. Nurodykite k reikšmę, su kuria lygčių sistema

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y - kx = 4 \end{cases}$$

a) turi tik vieną sprendinį; b) neturi sprendinių.

380. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} y = |x|, \\ y = 2x - 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = |x|, \\ y = -|x|. \end{cases}$

381. Su kuria c reikšme lygčių sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 1, \\ 4x + 3y = c \end{cases}$$

a) neturi sprendinių; b) turi be galo daug sprendinių?

382. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite visus taškus, kurių abscisės lygios ordinatėms.

383. Nurodykite koordinačių plokštumos sritį, kurioje kiekvieno taško ordinatė didesnė už atitinkamą abscisę.

384. Apskaičiuokite:

a) $\left(2\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6}\right) : 2{,}8 + 2\frac{1}{6}$;

b) $\sqrt{0{,}18 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + 5^3 : 3^{-1}$.

385. Trikampio kraštinių ilgis išreikštas natūraliaisiais skaičiais. Viena kraštinė lygi 6 cm, antra — 2 cm. Koks gali būti trečiosios kraštinės ilgis?

386. Ar galima turint 2 ℓ 25% acto ir kibirą vandens pasigaminti:
a) 5 ℓ 10% acto marinatą; b) 3 ℓ 20% acto marinatą?

6 Lygčių ekvivalentumas. Lygčių sistemų ekvivalentumas

Lygtys, turinčios tuos pačius sprendinius (arba neturinčios sprendinių), vadinamos ekvivalenčiomis.

Pavyzdžiui, lygtys $2x + 3 = 7$ ir $2x = 4$ yra ekvivalenčios, nes jos turi vieną ir tą patį sprendinį $x = 2$. Lygtys $(x + 5)(x - 5) = 0$ ir $5x = 25$ nėra ekvivalenčios, nes pirmosios lygties sprendiniai yra -5 ir 5, o antrosios — tik 5. Lygtys $0x = 6$ ir $x^2 + 3 = 0$ yra ekvivalenčios, nes jos neturi sprendinių.

Jei spręsdami lygtį atliekame tokius pertvarkymus:

- prie abiejų lygties pusių pridedame arba iš abiejų pusių atimame tą patį skaičių arba reiškinį (turintį prasmę su bet kuriomis nežinomojo reikšmėmis);
- abi lygties puses dauginame arba dalijame iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus arba reiškinio (turinčio prasmę su bet kuriomis nežinomojo reikšmėmis);

tai gauname lygtį, ekvivalenčią duotajai.

Pavyzdžiui, lygtis $\frac{x-3}{4} = 5$ yra ekvivalenti lygčiai $x - 3 = 20$, nes antroji gauta iš pirmosios padauginus abi jos puses iš 4.

Kitais atvejais galime prarasti kai kuriuos lygties sprendinius arba gauti pašalinių sprendinių.

Pavyzdžiui, lygtis $x(x - 1) = 0$ turi du sprendinius $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Jei būtume lygtį padaliję iš x, būtume praradę sprendinį $x = 0$.

Lygtis $x-2 = 0$ turi vieną sprendinį $x = 2$. Jei abi lygties puses padaugintume iš x, gautume lygtį $x(x - 2) = 0$, kuri turi du sprendinius $x_1 = 0$ ir $x_2 = 2$. Šiuo atveju atsirastų vienas pašalinis sprendinys $x = 0$.

Lygčių sistemos, turinčios tuos pačius sprendinius (arba neturinčios sprendinių), vadinamos ekvivalenčiomis.

Pavyzdžiui, lygčių sistemos $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1 \end{cases}$ ir $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ yra ekvivalenčios, nes jos turi vieną ir tą patį sprendinį $(1; 2)$.

Jei spręsdami lygčių sistemas atliekame tokius pertvarkymus:

- bet kurią sistemos lygtį pakeičiame jai ekvivalenčia lygtimi;
- vieną sistemos lygtį pakeičiame sistemos lygčių suma arba skirtumu, o kitą paliekame tą pačią,

tai gautoji lygčių sistema yra ekvivalenti pradinei.

Pavyzdžiui, lygčių sistemos

$$\begin{cases} 3x + y = 2, \\ 4x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} y = 2 - 3x, \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

yra ekvivalenčios, nes pirmoji sistemos lygtis pakeista jai ekvivalenčia lygtimi. Lygčių sistemos

$$\begin{cases} 5x + 4y = 12, \\ 3x - 4y = 4 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 8x = 16, \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$$

taip pat yra ekvivalenčios, nes pirmoji lygtis pakeista sistemos lygčių suma.

Pratimai ir uždaviniai

387. Kurios iš lygčių yra ekvivalenčios?

A $x + 2 = 0$ **B** $\frac{x}{2} = 1$ **C** $2x - 3 = 1$

388. Ar tarp čia pateiktųjų lygčių yra ekvivalenčių?

A $\frac{x}{2} = 0$ **B** $2 + x = 0$ **C** $-2x = 4$

D $(x + 2)(x - 2) = 0$ **E** $\frac{x}{2} + \frac{x-2}{6} = 3$

389. Kurios iš lygčių nėra ekvivalenčios?

A $x - 3 = 0$ **B** $\frac{x}{0{,}5} = 6$ **C** $(x + 3)(x - 3) = 0$

390. Ar šios lygčių sistemos yra ekvivalenčios:

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}04y = 0{,}2, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 4 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 3x + 0{,}4y = 2, \\ 3x + 2y = 24? \end{cases}$$

391. Taškas $A(5; 2)$ priklauso parabolei $y = a(x + m)^2$, kurios viršūnė yra $B(1; 0)$. Raskite a ir m reikšmes.

392. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $x^2 + 2x - 8$; b) $x^2 - 3x - 4$.

393. Kokie skaičiai turėtų būti parašyti vietoj žvaigždučių, kad lygybė būtų teisinga (du atvejai)?

$\star\star\star\star - \star\star\star = 2$

394. Duotas stačiakampis, kurio kraštinės yra 6 cm ir 3 cm. Kaip šį stačiakampį sukarpyti į tris trikampius, kad iš jų būtų galima sudėti kvadratą? Kokio ilgio šio kvadrato kraštinė?

Pasitikrinkite

1. Ar duotoji skaičių pora yra lygties $3x + y = 9$ sprendinys:
a) $(4; -3)$; b) $(2; 3)$; c) $(1; 7)$?

2. Išreiškę nežinomąjį y nežinomuoju x raskite po du kiekvienos lygties sprendinius:
a) $4x + y = 5$; b) $6x - 2y = 9$.

3. Kuri iš duotųjų skaičių porų yra lygčių sistemos
$$\begin{cases} 3x + y = 8, \\ 5x - 2y = 6 \end{cases}$$
sprendinys:
a) $(1; 5)$; b) $(2; 2)$; c) $(3; -1)$?

4. Išspręskite tiesinių lygčių sistemas grafiškai:

a) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + 3y = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 2, \\ -2x - y + 2 = 0. \end{cases}$

5. Išspręskite tiesinių lygčių sistemas keitimo būdu:

a) $\begin{cases} 7x - 3y = 13, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y + 6 = 0. \end{cases}$

6. Išspręskite tiesinių lygčių sistemas sudėties būdu:

a) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ 5x + 6y = 3. \end{cases}$

7. Nebraižydami grafikų raskite tiesių susikirtimo taškų koordinates:
a) $2x + 3y = 12$ ir $x + 5y = 20$;
b) $3x + 4y = 11$ ir $2x - 5y = -8$.

8. Aistė už 3 tušinukus ir 2 pieštukus sumokėjo 6,6 Lt, o Rokas už 2 tokius pačius tušinukus ir vieną pieštuką toje pačioje parduotuvėje sumokėjo 4,3 Lt. Kiek kainavo tušinukas ir kiek pieštukas?

9. Motorinės valties greitis prieš srovę yra 10 km/h, o pasroviui — 18 km/h. Koks upės tėkmės greitis ir koks savasis valties greitis?

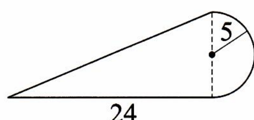
10. Justas rinko 2 centų ir 50 centų monetas. Berniukas surinko 300 monetų, kurių bendra vertė 30 litų. Kiek iš surinktų monetų buvo 50 centų vertės?

11. Aurimas vyresnis už Eglę. Jų amžiaus skirtumas yra 12 metų, o suma — 50 metų. Raskite Aurimo ir Eglės amžių.

12. Raskite koordinates taškų, kuriuose kertasi parabolė $y = 5 - x^2$ ir tiesė:
a) $y = 1$; b) $y = -4$.

13. Dvi priešingos kvadrato $ABCD$ viršūnės yra $A(6; -2)$ ir $C(6; 8)$. Nusibraižę brėžinį raskite kvadrato:
a) kitų dviejų viršūnių koordinates; b) kraštinę; c) plotą; d) perimetrą.

14. Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite figūros perimetrą ir plotą.



15. Apskaičiuokite:
a) $\left(1\frac{5}{6} : 1{,}1 + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{10}{17}$; b) $\frac{0{,}63 \cdot \frac{1}{9}}{0{,}75 - \frac{2}{3}}$.

16. Suprastinkite reiškinį:
a) $(x - 2)^2 - 2(3 - 2x)$;
b) $(3 + c)^2 - 2c(c + 3)$;
c) $(4a^2 - 6ab + 9b^2)(2a + 3b) - 2a(4a^2 - b)$.

17. Suapvalinę skaičių iki vienetų raskite apvalinimo absoliučiąją ir santykinę paklaidas:
a) 1,4; b) 9,8.

18. Išskaidykite dauginamaisiais:
a) $25 - 9x^2$; b) $16a^3 - a$; c) $2xy + 2y - x - 1$; d) $3b - ab + a - 3$.

19. Prekė, kainavusi 80 Lt, pabrango ir dabar kainuoja:
a) 89,6 Lt; b) 94,4 Lt.
Kiek procentų pabrango prekė?

20. Nustatykite, kiek sveikųjų sprendinių tenkina nelygybę:

a) $-124 \leqslant x \leqslant 15$ b) $-124 < x < 15$
c) $|y| < 121$ d) $|y| \leqslant 120$

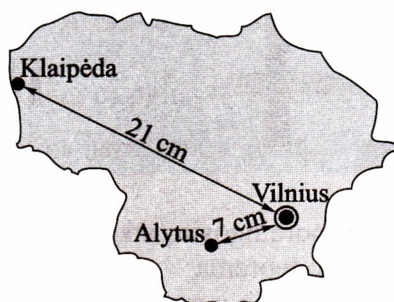
21. Išvažiavęs iš stoties traukinys tolygiai didino greitį, ir greitis padidėdavo 50 metrų kas minutę. Koks buvo traukinio greitis baigiantis:
a) penktai; b) aštuntai; c) dešimtai; d) keturioliktai minutei?

4 TRIKAMPIŲ PANAŠUMAS



1 Proporcingosios atkarpos

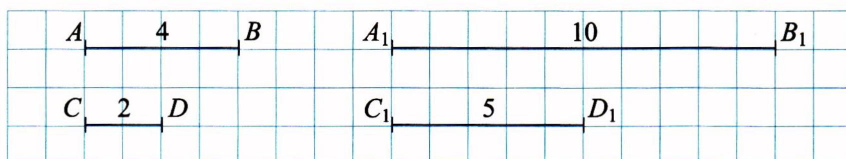
Atstumas tarp Vilniaus ir Alytaus yra 105 km, o tarp Vilniaus ir Klaipėdos — 315 km. Atstumai tarp šių miestų žemėlapyje atitinkamai lygūs 7 cm ir 21 cm.
Palyginkime realių atstumų tarp šių miestų ir atstumų žemėlapyje santykius.



Realaus atstumo tarp Vilniaus ir Alytaus ir atstumo tarp šių miestų žemėlapyje santykis yra $\frac{105}{0{,}00007} = 1\,500\,000$, o atstumų tarp Vilniaus ir Klaipėdos — $\frac{315}{0{,}00021} = 1\,500\,000$.

Matome, kad santykiai yra lygūs. Skaičius 1 500 000 parodo, kiek kartų atstumai vietovėje yra didesni už atitinkamus atstumus žemėlapyje. Sakome, kad atstumai vietovėje yra proporcingi atstumams žemėlapyje. Žemėlapio mastelis yra 1 : 1 500 000.

Brėžinyje pavaizduotos atkarpos AB, A_1B_1, CD ir C_1D_1.



Atkarpų AB ir A_1B_1 bei atkarpų CD ir C_1D_1 ilgių santykiai yra lygūs:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{5}, \quad \text{t. y.} \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

Atkarpos AB ir CD vadinamos proporcingomis atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1, jeigu jų ilgių santykiai yra lygūs, t. y. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Atkarpų proporcingumas apibrėžiamas ir esant daugiau atkarpų nei dvi. Pavyzdžiui, atkarpos AB, CD ir EF yra proporcingos atkarpoms A_1B_1, C_1D_1 ir E_1F_1, jeigu jų ilgių santykiai yra lygūs, t. y.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}.$$

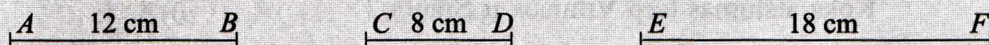
Geometrinis vidurkis

Teigiamieji skaičiai a ir b yra proporcingi teigiamiesiems skaičiams c ir d, jeigu teisinga lygybė $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Iš to išplaukia, kad $a \cdot d = b \cdot c$. Jeigu skaičiai a ir d yra lygūs, t. y. $d = a$, tai teisinga lygybė $a^2 = b \cdot c$. Iš čia $a = \sqrt{b \cdot c}$. Sakoma, kad skaičius a yra skaičių b ir c geometrinis vidurkis.

Pavyzdžiui, skaičių 2 ir 18 geometrinis vidurkis yra lygus $\sqrt{2 \cdot 18} = 6$.

Sakysime, kad atkarpa AB yra atkarpų CD ir EF geometrinis vidurkis, jeigu atkarpos AB ilgis yra atkarpų CD ir EF ilgių geometrinis vidurkis, t. y. $AB = \sqrt{CD \cdot EF}$.

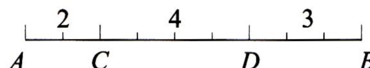
Brėžinyje pavaizduotos atkarpos AB, CD ir EF.



Atkarpa AB yra atkarpų CD ir EF geometrinis vidurkis, nes teisinga lygybė $12 = \sqrt{8 \cdot 18}$, t. y. $AB = \sqrt{CD \cdot EF}$.

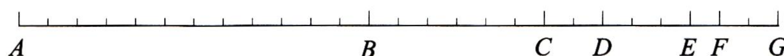
Pratimai ir uždaviniai

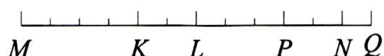
395. Remdamiesi brėžiniu apskaičiuokite $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AD}{AB}$, $\frac{DB}{AB}$, $\frac{CD}{AB}$.



396. Ar proporcingos brėžinyje pavaizduotos atkarpos:

a) AB, BC ir MK, PN b) AC, DG ir ML, PN
c) AB, CD ir KP, NQ d) BD, DE ir MP, PQ?



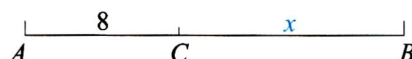


397. Remdamiesi brėžiniu (brėžinyje atstumai nurodyti nesilaikant mastelio) apskaičiuokite x, jeigu:



a) $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{2}$; b) $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{3}$; c) $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$.

398. Apskaičiuokite x, jeigu:



a) $\frac{AB}{CB} = \frac{5}{3}$; b) $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{2}$; c) $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$.

(Brėžinyje atstumai nurodyti nesilaikant mastelio.)

399. Atkarpos AB ir CD yra proporcingos atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1. Apskaičiuokite ilgį atkarpos:

a) C_1D_1, jeigu $AB = 5\,\text{cm}$, $CD = 75\,\text{mm}$, $A_1B_1 = 4\,\text{cm}$;
b) A_1B_1, jeigu $AB = 6\,\text{cm}$, $CD = 72\,\text{mm}$, $C_1D_1 = 60\,\text{mm}$;
c) AB, jeigu $CD = 8\,\text{cm}$, $A_1B_1 = 9\,\text{cm}$, $C_1D_1 = 6\,\text{cm}$;
d) CD, jeigu $AB = 5\,\text{cm}$, $A_1B_1 = 8\,\text{cm}$, $C_1D_1 = 12\,\text{cm}$.

400. Atstumas tarp Vilniaus ir Utenos yra 96 km, o žemėlapyje jis lygus 6,4 cm.

a) Koks žemėlapio mastelis?
b) Koks atstumas tarp Vilniaus ir Panevėžio šiame žemėlapyje, jeigu realus atstumas tarp šių miestų yra 135 km?
c) Atstumas tarp Vilniaus ir Šiaulių šiame žemėlapyje yra 14,2 cm. Koks atstumas tarp Vilniaus ir Šiaulių?

401. Atkarpa AB yra atkarpų CD ir EF geometrinis vidurkis. Apskaičiuokite ilgį atkarpos:

a) AB, jeigu $CD = 4\,\text{cm}$, $EF = 9\,\text{cm}$;
b) DC, jeigu $AB = 12\,\text{cm}$, $EF = 24\,\text{cm}$.

402. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą, jeigu $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BO}$ ir:

a) $BC = 7\,\text{cm}$; b) $AB = 12\,\text{cm}$.

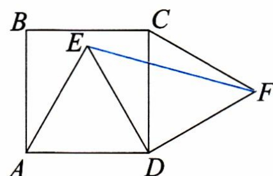
403. Taškas D yra trikampio ABC kraštinėje AC. Duota, kad $\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{2}{3}$ ir $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DC}$. Apskaičiuokite:

a) AC, jei $AB = 8\,\text{cm}$; b) AB, jei $AC = 9\,\text{cm}$.

404*. Taškas M priklauso atkarpai AB, o taškas N — atkarpai CD. Atkarpos AM ir MB yra proporcingos atkarpoms CN ir ND.
Įrodykite, kad $AB \cdot ND = MB \cdot CD$.

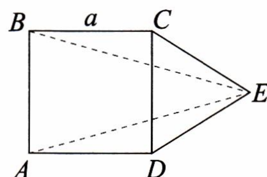
405*. Taškas K priklauso atkarpai AB, o taškas L — atkarpai CD. Atkarpos AB ir KB yra proporcingos atkarpoms CD ir LD.
Įrodykite, kad $AK \cdot LD = CL \cdot KB$.

406. $ABCD$ — kvadratas, kurio kraštinė lygi 4 cm. Trikampiai AED ir CFD — lygiakraščiai. Apskaičiuokite atstumą EF.

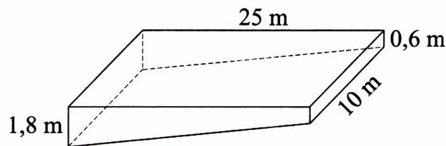


407. $ABCD$ — kvadratas, kurio kraštinė a, o trikampis DEC — lygiakraštis. Apskaičiuokite:

a) trikampio AEB plotą;
b) trikampio AED plotą.



408. Baseino ilgis yra 25 m, o plotis — 10 m. Baseino mažiausias gylis — 0,6 m, o didžiausias — 1,8 m. Kiek kubinių metrų vandens telpa baseine?



409. Įsitikinkite, kad trikampis ABC yra status, jeigu:
a) $A(-4; 5)$, $B(0; 7)$, $C(5; -3)$; b) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(5; -1)$.

410. Kokios rūšies trikampis KLM, jeigu:
a) $K(-2; 5)$, $L(3; 5)$, $M(3; 0)$; b) $K(-1; -2)$, $L(1; 4)$, $M(5; 0)$?

411. Patikrinkite, ar 3 taškai yra vienoje tiesėje:
a) $A(0; 5)$, $B(2; 1)$, $C(-1; 7)$; b) $K(3; 1)$, $L(-2; -5)$, $M(8; 7)$;
c) $E(0; 2)$, $F(-1; 5)$, $G(3; 4)$.

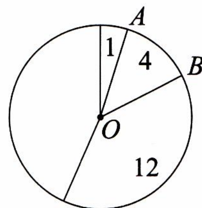
412. Išspręskite lygčių sistemą:
a) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 7, \\ 5x + 2y = 26; \end{cases}$ *c) $\begin{cases} \frac{5x-3y}{4} = \frac{x-5y}{3}, \\ 7x + y = 12. \end{cases}$

413. Apskaičiuokite:
a) $\sqrt{81} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \sqrt[3]{1{,}28 : 0{,}02}$; b) $\left(\sqrt{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \sqrt[3]{2{,}4 : 0{,}3}$.

414. Per tam tikrą laiką tekintojas turėjo nutekinti 120 detalių, kas valandą po 6 detales. Tačiau jis per valandą nutekindavo dviem detalėmis daugiau, negu buvo numatyta, ir jau prieš terminą buvo nutekinęs 121 detalę.
a) Per kiek laiko tekintojas turėjo atlikti užduotį ir per kiek laiko nutekino 121 detalę?
b) Kiek laiko anksčiau termino tekintojas pagamino 121 detalę?

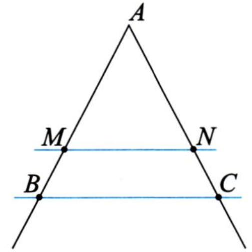
415. Parašykite Lietuvai reikšmingus metus arabiškais skaitmenimis:
a) MIX; b) MCCLIII; c) MCDX; d) MCMXVIII.

416. Vienos klasės 30 moksleivių apklausos rezultatai pavaizduoti skrituline diagrama: 1 moksleivis ketina studijuoti filosofiją, 4 moksleiviai — tiksliuosius mokslus, 12 moksleivių — kalbas, o likusieji — ekonomiką.



a) Kiek moksleivių norėtų studijuoti ekonomiką?
b) Kiek procentų klasės moksleivių ruošiasi studijuoti kalbas?
c) Kuri klasės moksleivių dalis ruošiasi studijuoti tiksliuosius mokslus?
d) Apskaičiuokite diagramos kampo AOB didumą.
e) Kiek procentų norinčių studijuoti tiksliuosius mokslus sudaro norintys studijuoti kalbas?

2 Talio teorema



1 *užduotis.* Brėžinyje pavaizduotas kampas, kurio viršūnė A, ir dvi lygiagrečios tiesės MN ir BC, kertančios kampo kraštines.

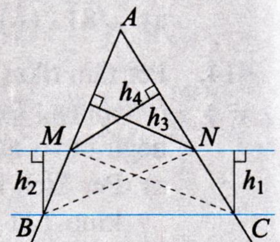
1. Išmatuokite atkarpų AM ir AB, AN ir AC ilgius.
2. Naudodamiesi skaičiuokliu įsitikinkite, kad santykiai $\frac{AM}{AB}$ ir $\frac{AN}{AC}$ yra lygūs (arba labai mažai skiriasi).

Galima įrodyti, kad šie santykiai yra lygūs.

Talio teorema. *Jeigu dvi lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines, tai atkirstos atkarpos yra proporcingos.*

Duota: kampas, kurio viršūnė A, $MN \parallel BC$.

Įrodyti: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.



Įrodymas. Nagrinėkime trikampius MNB ir MNC. Jų plotai lygūs, nes kraštinė MN yra bendra, o aukštinės į šią kraštinę yra lygios ($h_1 = h_2$ — atstumas tarp lygiagrečių tiesių MN ir BC).
Taigi $S_{MNB} = S_{MNC}$.
Kita vertus,

$$S_{ANB} = S_{AMN} + S_{MNB} = S_{AMN} + S_{MNC} = S_{AMC}.$$

Kadangi $S_{MNB} = S_{MNC}$ ir $S_{ANB} = S_{AMC}$, tai

$$\frac{S_{ANM}}{S_{ANB}} = \frac{S_{ANM}}{S_{AMC}}.$$

Kadangi

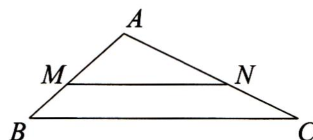
$$\frac{S_{ANM}}{S_{ANB}} = \frac{\frac{1}{2}AM \cdot h_3}{\frac{1}{2}AB \cdot h_3} = \frac{AM}{AB}, \quad \text{o} \quad \frac{S_{AMN}}{S_{AMC}} = \frac{\frac{1}{2}AN \cdot h_4}{\frac{1}{2}AC \cdot h_4} = \frac{AN}{AC},$$

tai

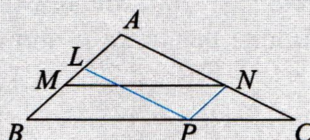
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Išvada. *Tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei ir kertanti kitas dvi kraštines, atkerta nuo jo trikampį, kurio kraštinės proporcingos duotojo trikampio kraštinėms.*

Duota: $\triangle ABC$, $MN \parallel BC$.
Įrodyti: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



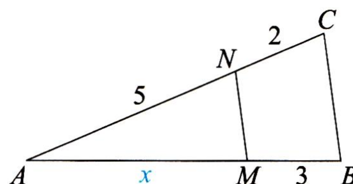
Įrodymas. Pagal Talio teoremą $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Liko įrodyti, kad $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Per tašką N nubrėžkime tiesę $NP \parallel AB$, o per tašką P — tiesę $PL \parallel CA$. Tada $AL = NP = MB$ (kaip lygiagretainių priešingosios kraštinės), todėl $BL = BA - AL = BA - MB = AM$. Dabar taikome Talio teoremą kampui B:



$$\frac{BP}{BC} = \frac{BL}{BA}.$$

Pakeitę šioje lygybėje atkarpą BP jai lygia atkarpa MN, o BL — jai lygia AM, gauname $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

1 PAVYZDYS.
Duota: $\triangle ABC$, $MN \parallel BC$, $AN = 5$, $NC = 2$, $MB = 3$.
Rasti: AM.



Sprendimas. Pagal Talio teoremą $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
Kadangi $AC = AN + NC = 5 + 2 = 7$, o $AB = AM + MB = x + 3$, tai

$$\frac{x}{x+3} = \frac{5}{7}.$$

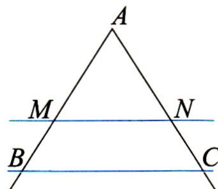
Iš čia:

$$7x = 5(x+3), \qquad x = 7{,}5.$$

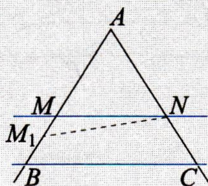
Atsakymas. $AM = 7{,}5$.

Teorema. (Atvirkštinė Talio teoremai.) *Jeigu dvi tiesės kerta kampo kraštines ir jose atkerta proporcingas atkarpas, tai tos tiesės yra lygiagrečios.*

Duota: $\angle BAC$, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
Įrodyti: $MN \parallel BC$.

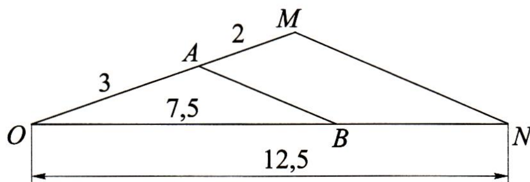


Įrodymas. Tarkime priešingai, kad tiesė MN nelygiagreti tiesei BC ($MN \nparallel BC$). Tuomet per tašką N nubrėžkime tiesę, lygiagrečią BC.



Sakykime, kad ji tiesę AB kerta taške M_1. Kadangi $NM_1 \parallel BC$, tai pagal Talio teoremą $\frac{AM_1}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Iš gautosios ir duotosios proporcijų išplaukia, kad $AM = AM_1$, t. y. taškas M sutampa su M_1. Vadinasi, mūsų prielaida neteisinga ir $MN \parallel BC$.

2 PAVYZDYS. Duotas trikampis OMN. $OA = 3$, $AM = 2$, $OB = 7{,}5$, $ON = 12{,}5$. Ar tiesės AB ir MN yra lygiagrečios?



Sprendimas. Kadangi

$$\frac{OA}{OM} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{OB}{ON} = \frac{7{,}5}{12{,}5} = \frac{3}{5}, \qquad \text{tai} \quad \frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}.$$

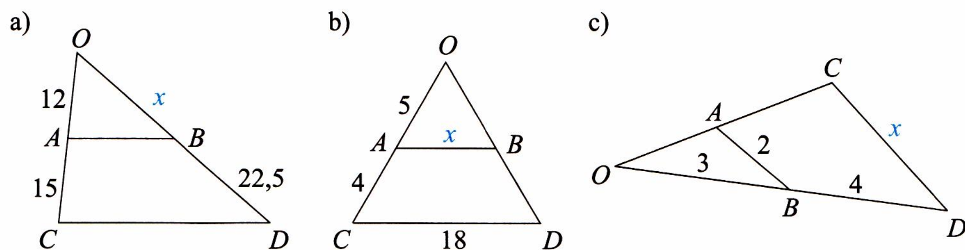
Vadinasi, pagal atvirkštinę Talio teoremą $AB \parallel MN$.
Atsakymas. $AB \parallel MN$.

Talis (625–547 m. prieš mūsų erą) — graikų matematikas, astronomas ir filosofas. Taliui, be kitų, priskiriamos šios teoremos:

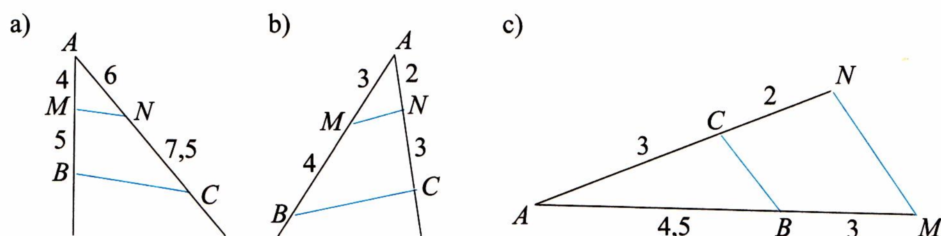
- Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs;
- Jei vienoje tiesėje nuosekliai atidėsime keletą lygių atkarpų, o per jų galus nubrėšime lygiagrečias tieses, tai jos kitoje tiesėje iškirs tarpusavyje lygias atkarpas.

Pratimai ir uždaviniai

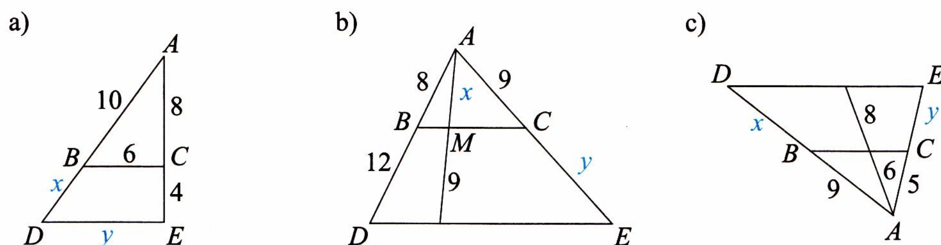
417. Raskite x, jeigu $AB \parallel CD$.



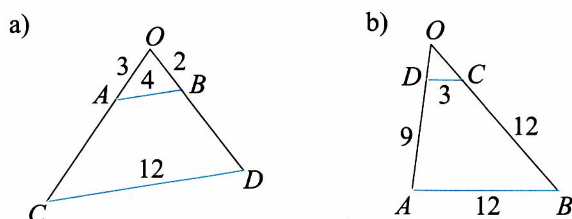
418. Ar lygiagrečios tiesės BC ir MN?



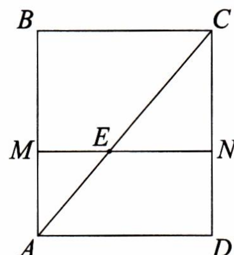
419. Raskite x ir y, jeigu $BC \parallel DE$:



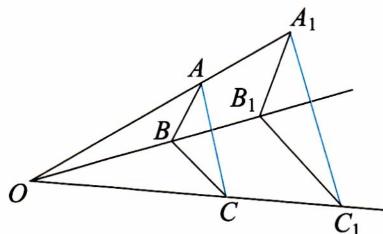
420. Apskaičiuokite trikampio OCD perimetrą, jeigu $AB \parallel CD$.



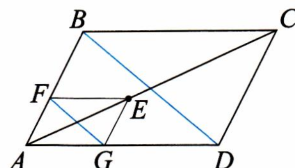
421. $ABCD$ — stačiakampis, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm. M — kraštinės AB taškas, $AM = 3{,}2$ cm, N — kraštinės CD taškas, $DN = 3{,}2$ cm, E — įstrižainės AC taškas, $AE = 4$ cm. Įrodykite, kad taškai M, E ir N priklauso vienai tiesei.
Nurodymas. Įrodykite, kad $ME \parallel BC$ ir $EN \parallel AD$.



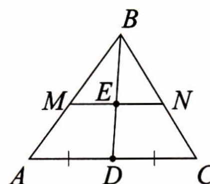
422. Duota: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$.
Įrodyti: $AC \parallel A_1C_1$.



423. Per lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės AC tašką E nubrėžtos dvi tiesės, lygiagrečios kraštinėms AB ir AD. Nubrėžtos tiesės kraštines AB ir AD kerta atitinkamai taškuose F ir G. Įrodykite, kad $FG \parallel BD$.



424. Duota: $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$, $AD = DC$.
Įrodyti: $ME = EN$.



425. Trikampio ABC viršūnių koordinatės yra: $A(3; -7)$, $B(5; 2)$, $C(-1; 0)$.
a) Raskite trikampio kraštinių AB, BC ir CA vidurio taškų M, N ir K koordinates.
b) Apskaičiuokite trikampio MNK perimetrą.

426. a) Trijų lygiagretainio $ABCD$ viršūnių koordinatės yra: $A(4; 2)$, $B(5; 7)$ ir $C(-3; 4)$. Raskite viršūnės D koordinates.
b) Dviejų lygiagretainio $ABCD$ viršūnių koordinatės yra: $A(2; -3)$ ir $B(-6; 4)$. Įstrižainių susikirtimo taško koordinatės $E(-1; 3)$. Apskaičiuokite kitų lygiagretainio viršūnių koordinates.

427. Raskite koordinates taškų, kuriuose susikerta parabolė $y = x^2 - 4x$ ir tiesė:
a) $y = x$; b) $y = -x - 2$.

428. Nurodykite, kur yra visi koordinačių plokštumos taškai, kurių:
a) abscisė yra 5; b) ordinatė yra -4.

429. a) Dviejų skaičių suma lygi 1, o jų skirtumas lygus −15. Raskite šiuos skaičius.
b) Dviejų skaičių suma lygi −4, o jų skirtumas lygus 24. Raskite šiuos skaičius.

430. Suprastinkite reiškinį:

a) $4t(t+s)-(s+2t)^2$ b) $z(z-4b)-(z-2b)^2$
c) $4\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{60}:\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{24}+\sqrt{150}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}$
*e) $(5+x)^3-x(5-x)^2-25(1+x)^2$ *f) $(x-1)^4+(x+1)^4$

431. Rombo įstrižainių santykis yra 3 : 4, o rombo perimetras lygus 1 m. Raskite rombo:
a) įstrižaines;
b) plotą;
c) aukštinę;
*d) įstrižainių susikirtimo taško atstumą iki kraštinių.

432. Išspręskite nelygybes:
a) $(x-5)(x-1)-45>(x+4)^2$; b) $(x-5)^2\leqslant(x-1)(x+2)+16$.

433. Laikrodis su valandine ir minutine rodyklėmis rodo lygiai 14 valandų. Raskite kampą tarp rodyklių lygiai po 20 minučių.

434. To paties mėnesio trys sekmadieniai buvo porinės dienos. Kokia savaitės diena buvo šio mėnesio 21 diena?
A pirmadienis **B** antradienis **C** trečiadienis
D ketvirtadienis **E** penktadienis

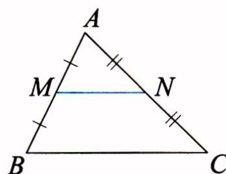
435. a) Aliejaus statinės masė sudaro 105% aliejaus masės, o tara sveria 9,2 kg. Aliejus buvo parduotas su 35% nuolaida ir gauta 676 Lt. Kokia pradinė aliejaus 1 ℓ kaina, jeigu aliejaus tankis 920 kg/m^3?
b) Aliejaus statinė sveria 193,2 kg. Tara sudaro 5% aliejaus masės. Aliejus buvo parduotas su 45% antkainiu ir gauta 1160 Lt. Kokia pradinė aliejaus 1 ℓ kaina, jeigu aliejaus tankis 920 kg/m^3?

436. Kokie skaitmenys pakeisti raidėmis? (Vienodus skaitmenis atitinka vienodos raidės, skirtingus — skirtingos.)

$$\begin{array}{r} i\,p\,a \\ \times\quad p\,a \\ \hline e\,p\,a \\ +\;p\,a\,s \\ \hline o\,i\,p\,a \end{array}$$

3 Trikampio ir trapecijos vidurinė linija

Brėžinyje pavaizduotas trikampis ABC. Taškai M ir N — kraštinių AB ir AC vidurio taškai, t. y. $AM = MB$, $AN = NC$.

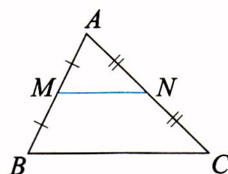


Atkarpa MN vadinama trikampio ABC vidurine linija.

Trikampio vidurine linija vadinama atkarpa, jungianti dviejų jo kraštinių vidurio taškus.

? Kiek vidurinių linijų turi trikampis?

Teorema. *Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti trikampio kraštinei ir lygi jos pusei.*



Duota: $\triangle ABC$, $AM = MB$, $AN = NC$.
Įrodyti: $MN \parallel BC$, $MN = \frac{BC}{2}$.

Įrodymas. Kadangi

$$AM = \frac{1}{2}AB \quad \text{ir} \quad AN = \frac{1}{2}AC, \quad \text{tai} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{ir} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Vadinasi,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

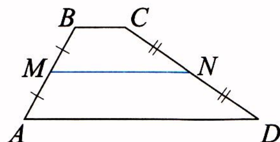
ir pagal atvirkštinę Talio teoremą $MN \parallel BC$.
Kadangi $MN \parallel BC$, tai trikampių AMN ir ABC kraštinės pagal Talio teoremos išvadą, yra proporcingos:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Vadinasi,

$$MN = \frac{BC}{2}.$$

Brėžinyje pavaizduota trapecija $ABCD$. Taškai M ir N — trapecijos šoninių kraštinių AB ir CD vidurio taškai, t.y. $AM = MB$, $DN = NC$.

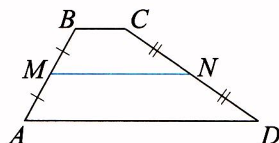


Atkarpa MN vadinama trapecijos vidurine linija.

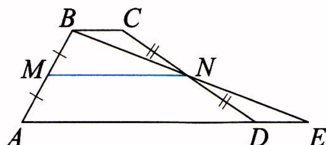
Trapecijos vidurine linija vadinama atkarpa, jungianti jos šoninių kraštinių vidurio taškus.

Teorema. *Trapecijos vidurinė linija yra lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.*

Duota: $ABCD$ — trapecija, $AD \parallel BC$, $AM = MB$, $CN = ND$.
Įrodyti: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{AD+BC}{2}$.



Įrodymas. 1) Per trapecijos viršūnę B ir šoninės kraštinės CD vidurio tašką N nubrėžkime tiesę BN. Tiesių BN ir AD susikirtimo tašką pažymėkime E.



2) $\triangle NCB = \triangle NDE$, nes $CN = ND$ — duota, $\angle CNB = \angle DNE$ — kryžminiai kampai, $\angle NCB = \angle NDE$ — vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių AD ir BC, kertamų tiesės CD. Vadinasi, $NB = NE$ ir $BC = DE$.

3) Kadangi $AM = MB$ ir $BN = NE$, tai atkarpa MN yra trikampio ABE vidurinė linija. Vadinasi, $MN \parallel AD$ ir $MN = \frac{1}{2}AE$.
Kadangi $AD \parallel BC$, tai $MN \parallel BC$. Kita vertus,

$$AE = AD + DE = AD + BC.$$

Taigi

$$MN = \frac{AD + BC}{2}.$$

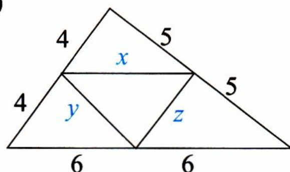
Pratimai ir uždaviniai

437. Trikampio ABC kraštinė AB lygi 7 cm. Raskite jai lygiagrečios trikampio vidurinės linijos ilgį.

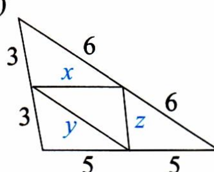
438. Trikampio ABC perimetras lygus 24 cm. Raskite trikampio AMN perimetrą, jeigu MN — vidurinė linija, lygiagreti kraštinei BC.

439. Apskaičiuokite x, y ir z

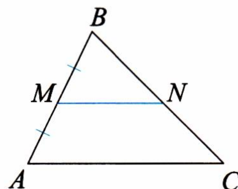
a)



b)



440. Per trikampio ABC kraštinės AB vidurio tašką M nubrėžta tiesė, lygiagreti kraštinei AC, kerta kraštinę BC taške N. Įrodykite, kad MN — trikampio vidurinė linija.



441. a) Trapecijos vienas pagrindas 6 cm ilgesnis už kitą pagrindą, o vidurinė linija lygi 12 cm. Raskite trapecijos pagrindus.

b) Raskite trapecijos pagrindus, jeigu jų ilgių santykis lygus 1,5, o vidurinė linija — 10 cm.

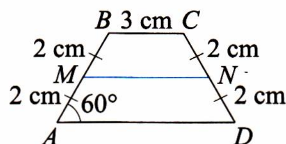
442. Trapecijos vidurinė linija lygi 15 cm. Viena trapecijos įstrižainė vidurinę liniją dalija į dvi atkarpas, kurių ilgių skirtumas yra 3 cm. Raskite trapecijos pagrindus.

443. Trapecijos pagrindai yra 5 cm ir 9 cm. Raskite ilgius atkarpų, į kurias vidurinę liniją dalija kiekviena įstrižainė.

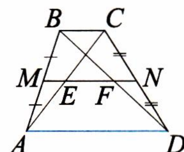
444*. Per trapecijos $ABCD$ šoninės kraštinės AB vidurio tašką M nubrėžta pagrindams lygiagreti tiesė kerta kitą šoninę kraštinę CD taške N. Įrodykite, kad atkarpa MN — trapecijos vidurinė linija.

445*. Įrodykite, kad trapecijos įstrižainių vidurio taškus jungianti atkarpa yra lygiagreti pagrindams ir lygi pusei jų ilgių skirtumo.

446. $ABCD$ — trapecija, $AD \parallel BC$. Apskaičiuokite MN ilgį.



447. MN — trapecijos $ABCD$ vidurinė linija. $BC = EF = 5$ cm. Apskaičiuokite AD.



448. Nubraižykite lygiakraštį trikampį ABC, kurio kraštinė lygi 3 cm.

a) Raskite taškus B_1 ir C_1, simetriškus taškams B ir C taško A atžvilgiu.

b) Raskite tašką A_1, simetrišką taškui A tiesės BC atžvilgiu.

c) Apibūdinkite keturkampius BCB_1C_1 ir ABA_1C.

d) Apskaičiuokite šių keturkampių perimetrus ir plotus.

449. Grafiškai išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} y - 4x = 0, \\ x - y = -3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ *c) $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0, \\ 2x - 6 = 0. \end{cases}$

450. Raskite apvalinimo absoliučiąją ir santykinę paklaidas suapvalinę skaičių 1,536 iki:

a) dešimtųjų; b) vienetų; *c) šimtųjų.

451. Apskaičiuokite:

a) $-\frac{4}{7} \cdot \left(0{,}8 : 1\frac{1}{15} + 2\frac{1}{6}\right)$; b) $\left(1\frac{13}{15} - 1{,}6 \cdot \frac{5}{12}\right) : \left(-2\frac{2}{5}\right)$.

452. Mokinys sprendė uždavinį, kuris prasidėjo sakiniu: „Per tris dienas vaisių parduotuvė pardavė 720 kg obuolių“. Spręsdamas jis sudarė tokią lygtį: $x + 2x + 3x = 720$. Suformuluokite pagal lygtį uždavinio sąlygą ir išspręskite uždavinį.

453. Klasėje mokosi 12 mergaičių ir 20 berniukų. Kiek procentų:

a) visos klasės mokinių sudaro mergaitės;

b) visos klasės mokinių sudaro berniukai;

c) klasės berniukų skaičiaus sudaro mergaičių skaičius;

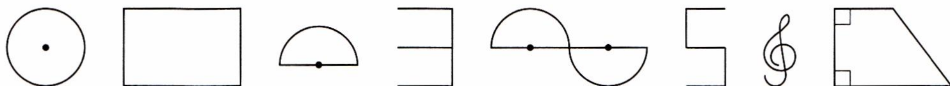
d) klasės mergaičių skaičiaus sudaro berniukų skaičius?

454. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{(y^2)^8 \cdot (2y)^4}{y^{26} : y^6} =$$

A 2 **B** $\frac{16}{y^6}$ **C** 8 **D** 16 **E** $2y^{24}$

455. Brėžinyje pavaizduotos 8 figūros.

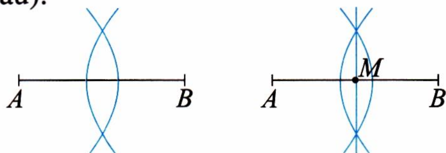


Pasiūlykite draugui įsidėmėti vieną figūrą. Pateikite draugui 3 klausimus, į kuriuos jis galėtų atsakyti tik „taip“ arba „ne“. Kokius klausimus turėtumėte pateikti, kad iš gautų atsakymų atspėtumėte, kurią figūrą buvo įsidėmėjęs draugas?

Nurodymas. Naudokitės simetrija ir figūros forma.

4 Atkarpos dalijimas duotu santykiu

Skriestuvu ir liniuote be padalų mokame atkarpą padalyti į dvi lygias dalis (pusiau).



? Kaip skriestuvu ir liniuote be padalų atkarpą padalyti į 4 lygias dalis? į 8 lygias dalis?

O ar galima skriestuvu ir liniuote be padalų atkarpą padalyti į 3, 5, 7 ir t.t. lygias dalis?

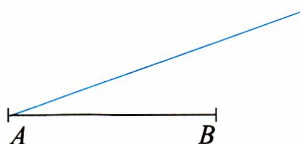
1 UŽDAVINYS. Skriestuvu ir liniuote be padalų padalykime atkarpą AB į penkias lygias dalis.

Sprendimas.

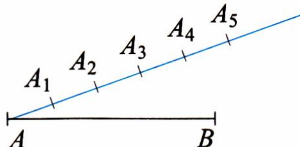
- Nubrėžkime atkarpą AB.



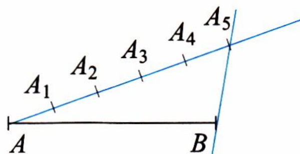
- Iš atkarpos galo A brėžiame spindulį.



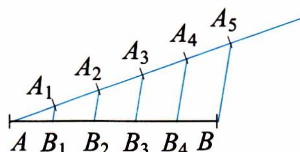
- Skriestuvu spindulyje pradedant nuo taško A atidedame penkias lygias atkarpas: $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$.



- Per taškus A_5 ir B brėžiame tiesę.



- Per taškus A_1, A_2, A_3 ir A_4 brėžiame tieses, lygiagrečias tiesei A_5B. Taškai B_1, B_2, B_3 ir B_4 padalija atkarpą AB į 5 lygias dalis.

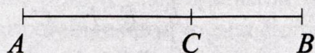


? Paaiškinkite, kodėl $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$.

Užduotis. Atkarpoje AB nurodykite tašką M, kuris šią atkarpą dalytų santykiu 3 : 2, t.y. $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$.

Aukso pjūvis (auksinė proporcija)

Atkarpą AB, kurios ilgis 1, reikia padalyti į dvi dalis — ilgesniąją AC ir trumpesniąją CB taip, kad visõs atkarpõs ir ilgesniosios jos dalies santykis būtų lygus ilgesniosios ir trumpesniosios dalių santykiui: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.



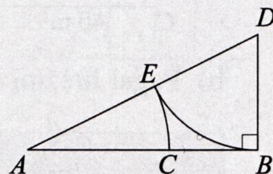
Pažymėkime, $AC = x$. Tuomet šią proporciją galima užrašyti taip: $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, $x^2 = 1 - x$, $x(x+1) = 1$. Nesunku patikrinti, kad skaičius $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ yra gautos lygties sprendinys (ir vienintelis, nes kai $x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tai kairėje nelygybės pusėje gausime daugiau už 1, o jei $x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tai gausime mažiau už 1). Santykis

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

vadinamas aukso pjūviu, arba auksine proporcija. Šį terminą įvedė Leonardas da Vinčis (Leonardo da Vinci, 1452–1519). Auksinė proporcija dažnai įžvelgiama architektūroje, mene, gyvojoje gamtoje.

2 UŽDAVINYS. Duotojo ilgio a atkarpą skriestuvu ir liniuote padalysime aukso pjūviu.

1. Nubrėžiame a ilgio atkarpą AB.
2. Iš atkarpos galo B brėžiame statmenį atkarpai AB ir atidedame atkarpą BD, lygią $\frac{1}{2}AB$.
3. Iš taško D spinduliu $\frac{1}{2}a$ brėžiame apskritimo lankelį, kuris atkarpą AD kerta taške E, o iš taško A spinduliu AE brėžiame apskritimo lankelį, kuris kerta AB taške C.



Santykis $\frac{AB}{AC}$ — aukso pjūvis.

Iš tikrųjų, $AD^2 = AB^2 + BD^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, $AD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$AC = AE = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

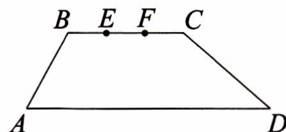
Pastebėsime, kad atkarpa AC yra atkarpų AB ir CB geometrinis vidurkis: $AC = \sqrt{AB \cdot CB}$.

Pratimai ir uždaviniai

456. Nubrėžkite atkarpą AB. Skriestuvu ir liniuote atkarpoje AB raskite tokį tašką C, kad:

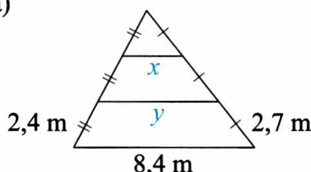
a) $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{5}$; b) $\frac{BC}{CA} = \frac{3}{4}$; c) $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$; d) $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$.

457. Trapecijos $ABCD$ pagrindas BC taškais E ir F padalytas į tris lygias dalis. Tik su liniuote be padalų pagrindą AD padalykite į tris lygias dalis.

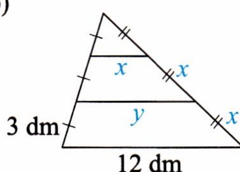


458. Apskaičiuokite x ir y:

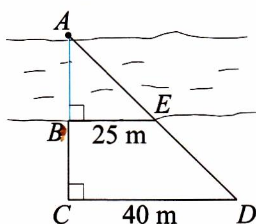
a)



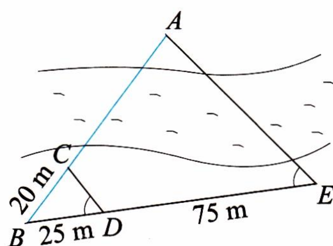
b)



459. a) Pagal brėžinį apskaičiuokite upės plotį.

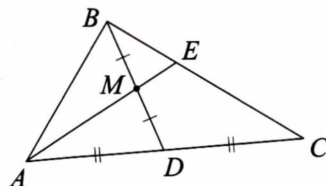


b) Pagal brėžinį apskaičiuokite atstumą AC.



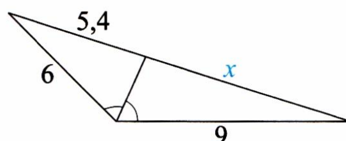
460. Per trikampio ABC pusiaukraštinės BD vidurio tašką M ir viršūnę A nubrėžta tiesė, kuri kerta kraštinę BC taške E. Apskaičiuokite $BE : EC$.

Nurodymas. Per tašką D nubrėžkite tiesę, lygiagrečią AE, ir remkitės trikampio vidurinės linijos savybe.



461. Raskite x.

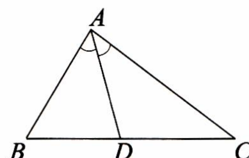
Nurodymas. Prieš spręsdami šį uždavinį susipažinkite su trikampio kampo pusiaukampinės savybe, pateikta smulkiu šriftu.



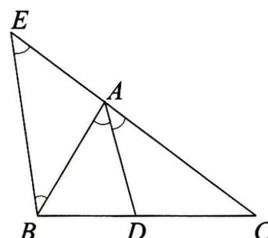
Įrodykime, kad trikampio kampo pusiaukampinė prieš jį esančią kraštinę dalija į atkarpas, proporcingas prie jo esančioms kraštinėms.

Duota: $\triangle ABC$, $\angle BAD = \angle DAC$.

Įrodyti: $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

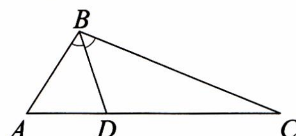


Įrodymas. Per tašką B nubrėžkime tiesę, lygiagrečią AD. Jos susikirtimo su tiese AC tašką pažymėkime raide E. $\triangle EAB$ — lygiašonis, nes: 1) $\angle BEA = \angle DAC$ (atitinkamieji kampai, gauti dvi lygiagrečias tieses AD ir BE perkirtus tiese EC), o $\angle EBA = \angle BAD$ (vidaus priešiniai kampai); 2) $\angle BAD = \angle DAC$ (AD — pusiaukampinė), todėl $\angle BEA = \angle EBA$ ir $AE = AB$. Kadangi $DA \parallel BE$, tai pagal Talio teoremą: $\frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CB}$.

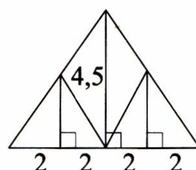


Todėl $\frac{CA+AE}{CA} = \frac{CD+DB}{CD}$, $1 + \frac{AE}{CA} = 1 + \frac{DB}{CD}$, $\frac{AE}{CA} = \frac{DB}{CD}$, $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

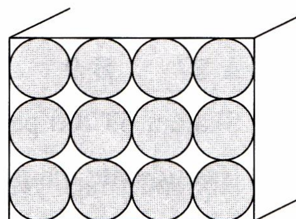
462. Trikampio ABC $AC = 12\,\text{cm}$, $AB = 5\,\text{cm}$, $BC = 9\,\text{cm}$, o BD — kampo B pusiaukampinė. Raskite AD ir DC.



463. Brėžinyje pavaizduota konstrukcija pagaminta iš metalinių virbų. Apskaičiuokite virbų ilgių sumą 0,1 m tikslumu. (Duomenys nurodyti metrais.)



464. Vienodo skersmens rąstai sudėti į stačiakampio gretasienio formos krūvą, kurios matmenys $1{,}6\,\text{m} \times 1{,}2\,\text{m} \times 15\,\text{m}$.



a) Apskaičiuokite užimamą rąstų tūrį V.

b) Apskaičiuokite medienos tūrį V_1 (ritinio tūrį apskaičiuokite pagal formulę $V = \pi R^2 H$).

c) Apskaičiuokite santykį $V_1 : V$.

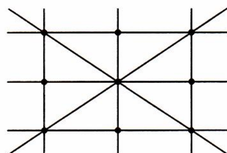
*d) Apskaičiuokite $\frac{V_1}{V}$, jeigu krūvos matmenys nežinomi, o vienoje eilėje yra m rąstų ir yra n eilių. Ar šis santykis priklauso nuo rąstų skersmens?

465. Baseinėlis yra ritinio formos, kurio spindulys 2,2 m, o gylis 80 cm.

a) Per kiek laiko bus pripildytas baseinas leidžiant vandenį čiaupu, iš kurio per minutę išbėga 90 litrų vandens?

b) $1\,\text{m}^3$ vandens kainuoja 3,11 ct. Kiek kainuoja pripildyti baseiną?

466. Brėžinyje pavaizduota, kaip galima išdėstyti 9 taškus ir per juos nubrėžti 8 tieses taip, kad kiekvienoje tiesėje būtų po 3 taškus. Išdėstykite 9 taškus taip, kad per juos būtų galima nubrėžti 10 tiesių, kurių kiekvienoje būtų po 3 taškus.

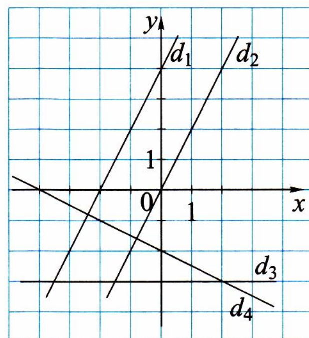


467. Koordinačių plokštumoje nubrėžtos tiesės d_1, d_2, d_3, d_4.

a) Raskite nubrėžtų tiesių lygtis tarp lygčių
$y = 2x$, $y = -x - 2$,
$y = -3$, $y = 2x + 4$,
$y = -\frac{1}{2}x - 2$, $y = x + 4$.

b) Įrodykite, kad $d_1 \parallel d_2$.

c) Įsitikinkite, kad $d_1 \perp d_4$.



468. a) Parabolei $y = ax^2 + c$ priklauso taškai $A(10; 3)$ ir $B(-5; -4{,}5)$. Raskite a ir c reikšmes.

b) Parabolei $y = a(x + m)^2$ priklauso taškas $A(-3; -4)$, o jos viršūnės taškas yra $B(-5; 0)$. Raskite a ir m reikšmes.

469. a) 4 sąsiuviniai ir 2 tušinukai kainuoja 12 Lt, o tokie patys 5 sąsiuviniai ir 3 tušinukai — 13,5 Lt. Kiek kainuoja vienas sąsiuvinis ir kiek vienas tušinukas?

b) Už 1,5 kg saldainių ir 2,4 kg sausainių sumokėta 42 Lt, o už tų pačių 0,6 kg saldainių ir 1,5 kg sausainių — 22 Lt 20 ct. Kiek kainuoja 1 kg saldainių ir kiek 1 kg sausainių?

470. Jeigu $a = 3\sqrt{2}$, tai reiškinio $\frac{a^3}{2}$ reikšmė lygi:

A 27 **B** 9 **C** $27\sqrt{2}$ **D** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ **E** $\frac{27\sqrt{2}}{4}$

471. Skaičių 63 700 parašykite pirminių dauginamųjų laipsnių sandauga.

472. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $m^2 + m + n - n^2$ b) $2a^3 - a^2b - 2ab^2 + b^3$

c) $x^4 - y^4$ *d) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

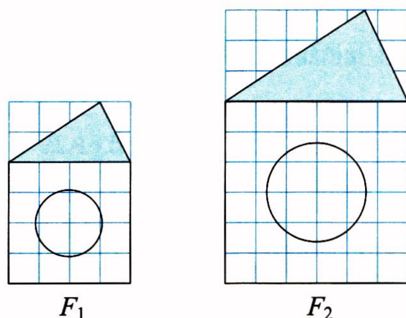
473. Skaičius $N = 123456789101112\ldots9989991000$ (surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 1000).

a) Kiek iš viso skaitmenų sudaro šį skaičių?

*b) Koks šio skaičiaus 2000-asis skaitmuo?

5 Trikampių panašumas

Didinant ar mažinant figūras nekinta figūros forma, o kinta tik jos matmenys.

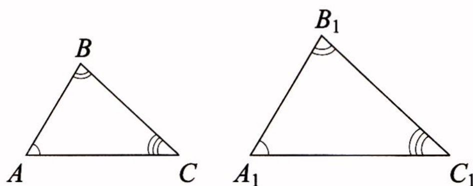


Brėžinyje pavaizduota figūra F_2, gauta iš figūros F_1 padidinus ją 1,5 karto. Galima sakyti, kad figūra F_1 yra gauta iš figūros F_2 sumažinus ją 1,5 karto. Tokios figūros vadinamos *panašiomis*.
Šiame skyrelyje nagrinėsime panašiuosius trikampius.

Du trikampiai vadinami panašiais, jeigu jų atitinkami kampai lygūs ir vieno trikampio kraštinės proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms.

Taigi du trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs, jeigu:

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1;$$
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k.$$



Skaičius k vadinamas *panašumo koeficientu*. Sakysime, kad trikampis ABC yra panašus į trikampį $A_1B_1C_1$ ir rašysime

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1.$$

Jų panašumo koeficientas yra k. Akivaizdu, kad ir $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, o jų panašumo koeficientas yra $\frac{1}{k}$. Kai $k = 1$, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Taigi trikampių lygumas yra atskiras trikampių panašumo atvejis.


Koks brėžinyje nuspalvintų trikampių panašumo koeficientas?

Panašiųjų trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.
Iš tikrųjų, kadangi $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $CA = kC_1A_1$, tai

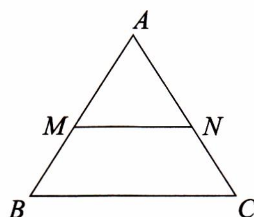
$$P_{ABC} = AB + BC + CA = kA_1B_1 + kB_1C_1 + kC_1A_1 = \\ = k(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = kP_{A_1B_1C_1}.$$

Vadinasi,

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k.$$

Teorema. *Tiesė, lygiagreti vienai trikampio kraštinei ir kertanti kitas kraštines, atkerta trikampį, panašų į duotąjį.*

Duota: $\triangle ABC$, $MN \parallel BC$.
Įrodyti: $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$.

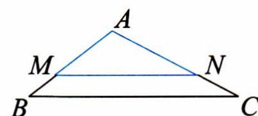


Įrodymas. Pagal Talio teoremos išvadą:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Kita vertus, šių trikampių kampai yra lygūs:
$\angle A$ — bendras, o $\angle AMN = \angle ABC$, $\angle ANM = \angle ACB$, kaip atitinkamieji kampai, gauti dvi lygiagrečias tieses MN ir BC perkirtus tiesėmis AB ir AC. Taigi, $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$.

UŽDAVINYS. Trikampio ABC kraštinių AB ir AC taškus jungianti atkarpa MN lygiagreti kraštinei BC. Apskaičiuokite trikampio AMN perimetrą, jeigu $AB = 9\,\text{cm}$, $AC = 12\,\text{cm}$, $BC = 18\,\text{cm}$ ir $MN = 12\,\text{cm}$.



Sprendimas. Pagal teoremą trikampis AMN panašus į trikampį ABC. Jų panašumo koeficientas

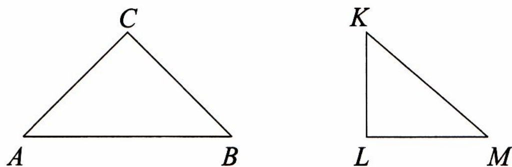
$$k = \frac{MN}{BC} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Kadangi $P_{ABC} = 9 + 12 + 18 = 39\,(\text{cm})$, tai $P_{AMN} = \frac{2}{3}P_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot 39 = 26\,(\text{cm})$.

Atsakymas. 26 cm.

Pratimai ir uždaviniai

474. Išmatuokite trikampių ABC ir KLM kampus ir kraštines. Ar panašūs šie trikampiai?



475. Ar panašūs du lygiakraščiai trikampiai? Atsakymą pagrįskite.

476. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, ir jų panašumo koeficientas yra k_1. $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$, ir jų panašumo koeficientas yra k_2. Koks trikampių ABC ir $A_2B_2C_2$ panašumo koeficientas?

477. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $A_1B_1 = 10$, $B_1C_1 = 8$, $C_1A_1 = 7$, $AB = 4$. Raskite kitas trikampio ABC kraštines.

478. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 9$, $B_1C_1 = 14$. Raskite kitas trikampio $A_1B_1C_1$ kraštines.

479. Trikampio kraštinės yra 1,6 dm, 3,2 dm ir 4 dm. Panašaus į jį trikampio perimetras lygus 11 dm. Apskaičiuokite šio trikampio kraštines.

480. Trikampio ABC kraštinės yra: $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 7$ cm. Nubraižykite į jį panašų trikampį, kurio perimetras būtų lygus 18 cm.

481. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. $P_{ABC} = \frac{5}{7}P_{A_1B_1C_1}$. Dviejų atitinkamų kraštinių skirtumas lygus 3 cm. Apskaičiuokite šių kraštinių ilgius.

482. Iš vietovės A 8 val. išvyko sunkvežimis 50 km/h greičiu. 9 val. iš A ta pačia kryptimi 75 km/h greičiu išvažiavo autobusas. Koordinačių plokštumoje (Ox ašyje 2 cm atitinka 1 val., Oy ašyje 1 cm — 50 km) nubraižykite sunkvežimio ir autobuso važiavimo grafikus. Remdamiesi grafikais atsakykite:

a) Kelintą valandą autobusas pavys sunkvežimį ir kokį atstumą jie tuo metu bus nuvažiavę nuo A?

b) Koks atstumas tarp sunkvežimio ir autobuso bus 10 val.?

483. Iš miestų A ir B, atstumas tarp kurių yra 150 km, vienu metu 10 val. išvyksta dviratininkas 20 km/h greičiu ir autobusas 60 km/h greičiu. Koordinačių plokštumoje (Ox ašyje 3 cm atitinka 1 val., Oy ašyje 1 cm — 25 km) nubraižykite dviratininko ir autobuso važiavimo grafikus. Remdamiesi grafikais, atsakykite:

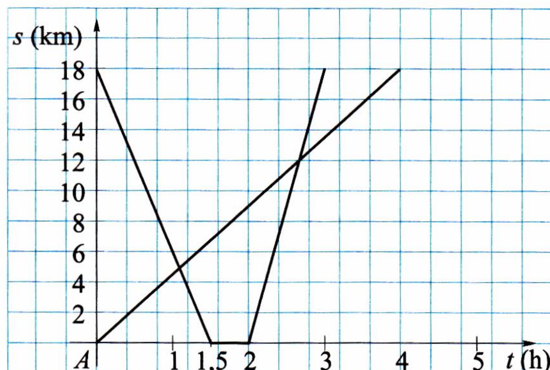
a) Kelintą valandą susitiks dviratininkas ir autobusas ir koks atstumas bus tuo metu nuo jų iki A?

b) Koks atstumas bus tarp dviratininko ir autobuso 11 val. 15 min.?

c) Kelintą valandą autobusas bus 40 km nuo miesto A?

d) Kelintą valandą dviratininkas bus 25 km nuo miesto B?

484. Iš vietovių A ir B vienu metu vienas priešais kitą išvyko pėstysis ir dviratininkas. Brėžinyje pavaizduoti jų važiavimo grafikai.



a) Kiek kilometrų nuėjo pėstysis per 1,5 h?

b) Kiek kilometrų nuvažiavo dviratininkas per 0,5 h; per 3 h nuo jo išvykimo pradžios?

c) Kiek laiko truko dviratininko kelionė; pėsčiojo kelionė?

d) Koks buvo atstumas iki A, kai susitiko dviratininkas ir pėstysis; ar dviratininkas grįždamas į B aplenkė pėstįjį?

e) Kiek kilometrų liko eiti iki B pėsčiajam, kai dviratininkas grįžo į B?

485. Pas mus įprasta temperatūrą matuoti Celsijaus laipsniais. Anglijoje, JAV ir kai kuriose kitose šalyse temperatūra matuojama Farenheito laipsniais. Temperatūrą Celsijaus laipsniais x (°C) ir Farenheito laipsniais y (°F), sieja priklausomybė $y = ax + b$.

Žinoma, kad vanduo užšąla esant 0 °C, arba 32 °F, o vanduo verda esant 100 °C, arba 212 °F.

a) Raskite koeficientų a ir b reikšmes.

b) Popierius užsidega esant 451 °F. Esant kokiai temperatūrai pagal Celsijų užsidega popierius?

c) Kokia temperatūra pagal Farenheitą ir pagal Celsijų išreiškiama vienodu laipsnių skaičiumi?

d) Nubraižykite ryšio tarp temperatūros pagal Celsijų ir pagal Farenheitą grafiką. Remdamiesi grafiku atsakykite:

e) Kokia temperatūra pagal Celsijų, jei termometras rodo 90 °F?

f) Žmogaus temperatūra 105 °F. Ar jis yra ligonis?

486. a) Ūkininkas turi 0,14 km^2 dirbamos žemės, 1,5 ha pievų, 2 ha miško ir tvenkinį. Raskite tvenkinio plotą (1 m^2 tikslumu), jeigu jis sudaro 2,4% viso ūkio ploto.

b) Ūkininkas turi 0,16 km^2 žemės: dirbamos žemės yra 750 a, o miško plotas 45% didesnis už pievų plotą. Koks ūkininko pievų plotas (1 m^2 tikslumu)?

487. Pirmajame tėvo testamente turtas 3 sūnums buvo padalytas proporcingai skaičiams 7, 6 ir 5. Prieš mirtį tėvas testamentą perrašė ir turtą sūnums padalijo proporcingai skaičiams 6, 5 ir 4.

a) Kurie iš sūnų pagal antrąjį testamentą gaus daugiau turto, o kurie — mažiau, negu būtų gavę pagal pirmąjį testamentą?

b) Vienas sūnus pagal antrąjį testamentą gauna 1000 Lt daugiau, negu būtų gavęs pagal pirmąjį testamentą. Kokia paveldimo turto suma? Kiek litų paveldi kiekvienas sūnus?

488. Kuriuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose nėra taškų, priklausančių tiesei:

a) $x = -3$; b) $y = 3x + 5$?

489*. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x = 2 - y, \\ y = 2 - x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x = 1 - 2y. \end{cases}$

490. Apskaičiuokite neįprasto patiekalo sudedamųjų dalių masę ir užpildykite lentelę:

Dilgėlių maltinukai	%	340 g
Dilgėlės	34	
Varlių šlaunelės	59	
Riebalai	5	
Petražolės	2	

491*. Tarp skaičių 1 ir 16 parašykite:

a) du; b) tris; c) keturis; d) penkis

skaičius, kurie su duotaisiais skaičiais sudaro aritmetinę progresiją.

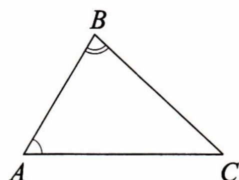
492. Raudonkepuraitė neša senelei 14 pyragėlių. Jie yra 3 rūšių: su mėsa, su grybais ir su kopūstais. Pyragėlių su kopūstais yra daugiausia — dukart daugiau nei pyragėlių su mėsa. Pyragėlių su mėsa yra mažiau nei pyragėlių su grybais. Kiek yra pyragėlių su grybais?

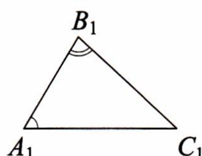
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

6 Trikampių panašumo požymiai

Norėdami būti tikri, kad trikampiai yra panašūs, tarsi turėtume patikrinti, ar visi kampai yra lygūs ir ar visos kraštinės proporcingos. Tačiau iš tikrųjų tiek vargti nereikia. Suformuluosime tris nesunkiai įrodomus trikampių panašumo požymius, kurie parodo, ko užtenka, kad trikampiai būtų panašūs.

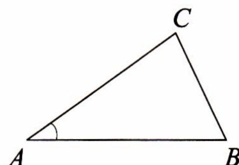
Trikampių panašumas pagal du kampus. *Du trikampiai yra panašūs, jeigu vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams.*

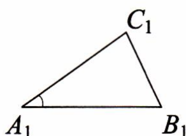




Jei $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
tai $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

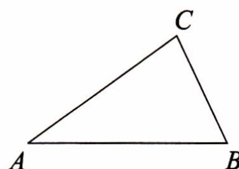
Trikampių panašumas pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. *Du trikampiai yra panašūs, jeigu vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs.*

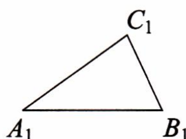




Jei $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,
tai $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Trikampių panašumas pagal tris kraštines. *Du trikampiai yra panašūs, jeigu vieno trikampio visos trys kraštinės proporcingos kito trikampio kraštinėms.*

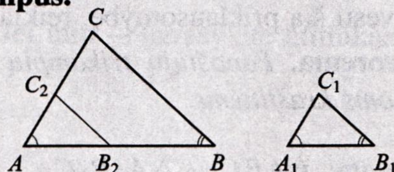




Jei $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$,
tai $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Pateikiame trikampių panašumo požymių įrodymus.

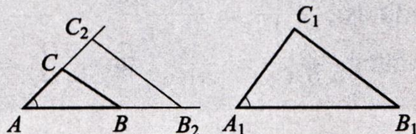
Trikampių panašumo požymis pagal du kampus.



Duota: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
Įrodyti: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Įrodymas. Akivaizdu, kad $\angle C = \angle C_1$. Reikia įrodyti, kad trikampių kraštinės yra proporcingos. Iš taško A spindulyje AB atidėkime atkarpą $AB_2 = A_1B_1$, o spindulyje AC — atkarpą $AC_2 = A_1C_1$.
Trikampiai AB_2C_2 ir $A_1B_1C_1$ yra lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Kadangi $\angle B_2 = \angle B_1 = \angle B$, tai $B_2C_2 \parallel BC$. Vadinasi, pagal Talio teoremos išvadą $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{CB}{C_2B_2}$, t. y. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CB}{C_1B_1}$, nes $AB_2 = A_1B_1$, $AC_2 = A_1C_1$, $C_2B_2 = C_1B_1$.
Taigi $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

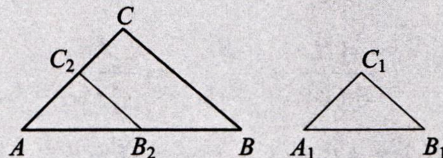
Trikampių panašumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.



Duota: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,
$\angle A = \angle A_1$.
Įrodyti: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Įrodymas. Spindulyje AB atidėkime atkarpą $AB_2 = A_1B_1$, o spindulyje AC — atkarpą $AC_2 = A_1C_1$. $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Duotoje proporcijoje $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ pakeitę atkarpas A_1B_1 ir A_1C_1 joms lygiomis atkarpomis AB_2 ir AC_2 turime: $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$. Pagal atvirkštinę Talio teoremą $BC \parallel B_2C_2$. Vadinasi, $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$.
Kadangi $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$, tai $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Trikampių panašumo požymis pagal tris kraštines.



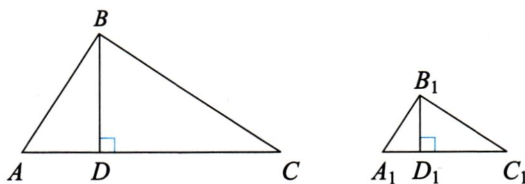
Duota: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.
Įrodyti: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Įrodymas. Iš taško A spindulyje AB atidėkime atkarpą $AB_2 = A_1B_1$, o spindulyje AC — atkarpą $AC_2 = A_1C_1$. Kadangi $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, tai pagal Talio atvirkštinę teoremą $BC \parallel B_2C_2$. Vadinasi, $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$. Be to, $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{AC_2}$. Šias proporcijas palyginę su duotąja gauname, kad $B_2C_2 = B_1C_1$. Taigi $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ pagal tris kraštines.
Kadangi $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle A_1B_1C_1$, todėl $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Praeitame skyrelyje įsitikinome, kad panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui. O kaip susiję panašiųjų trikampių plotai? Norint išvesti šią priklausomybę, reikia pasinaudoti tokia teorema:

Teorema. *Panašiųjų trikampių atitinkamos aukštinės proporcingos atitinkamoms kraštinėms.*

Duota: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.
Įrodyti: $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



Įrodymas. Kadangi $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, tai trikampių kraštinės proporcingos, t. y.: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Įrodysime, kad $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, kur BD ir B_1D_1 — atitinkamos trikampių aukštinės.

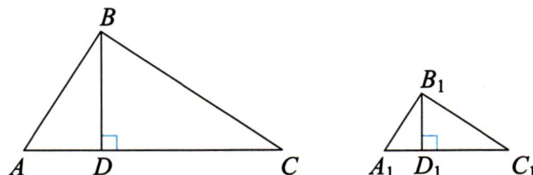
$\triangle BDC \backsim \triangle B_1D_1C_1$, nes $\angle C = \angle C_1$, $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1 = 90°$.

Vadinasi, $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Kadangi $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, tai $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Išvada. *Panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.*

Duota: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.
Įrodyti: $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$;
čia k — panašumo koeficientas.



Įrodymas. Kadangi $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, tai remdamiesi prieš tai įrodyta teorema galime užrašyti proporcijas:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1} = k.$$

Iš čia $AC = kA_1C_1$, $BD = kB_1D_1$. Pasinaudoję šiomis lygybėmis gauname:

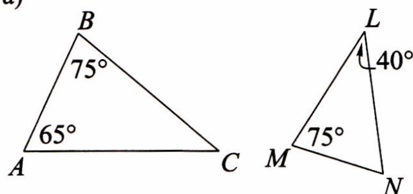
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}(k \cdot A_1C_1) \cdot (k \cdot B_1D_1) =$$
$$= \frac{1}{2}k^2 A_1C_1 \cdot B_1D_1 = k^2 \cdot S_{A_1B_1C_1}.$$

Vadinasi, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

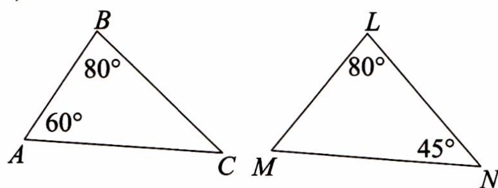
Pratimai ir uždaviniai

493. Ar trikampiai ABC ir MLN panašūs? Jei taip — užrašykite atitinkamų kraštinių proporcijas.

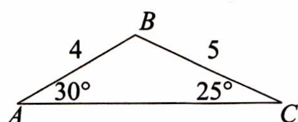
a)

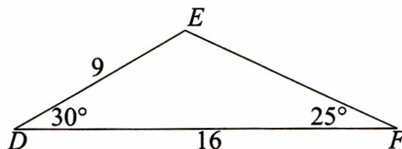


b)

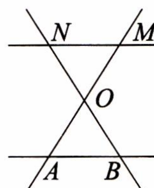


494. Raskite nežinomas trikampių ABC ir DEF kraštines.



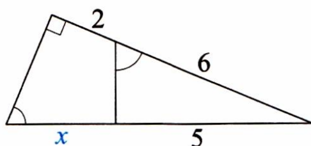


495. Duota: $MN \parallel AB$.
Įrodykite, kad $\triangle AOB \backsim \triangle MON$ ir užrašykite atitinkamų kraštinių proporcijas.

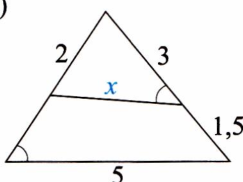


496. Raskite x.

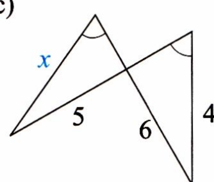
a)



b)

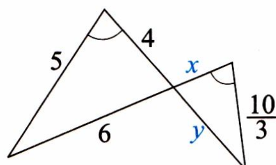


c)

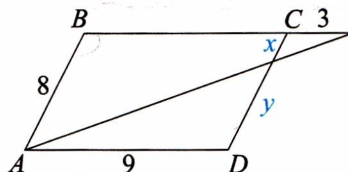


497. Raskite x ir y.

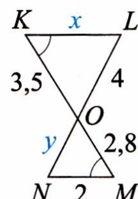
a)



b) $ABCD$ — lygiagretainis



c)

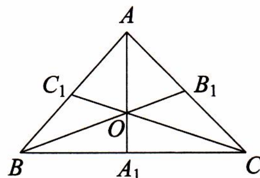


498. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 susikerta taške O. Apskaičiuokite:

a) $S_{AOB} : S_{AOB_1}$; b) $S_{AOB} : S_{ABC}$; *c) $S_{OA_1CB_1} : S_{ABC}$.

Nurodymas. Prieš spręsdami šį uždavinį susipažinkite su trikampio pusiaukraštinių savybe, pateikta žemiau smulkiu šriftu.

Įrodykime, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške ir tas taškas kiekvieną jų dalija santykiu 2 : 1 skaičiuojant nuo trikampio viršūnių.



Duota: $\triangle ABC$, $AB_1 = B_1C$, $CA_1 = A_1B$, $BC_1 = C_1A$.

Įrodyti: 1) AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške O;

2) $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{2}{1}$.

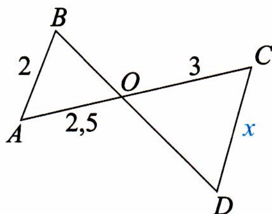
Įrodymas. Trikampyje ABC nubrėžkime dvi jo pusiaukraštines AA_1 ir BB_1. Jų susikirtimo tašką pažymėkime O. Atkarpa A_1B_1 yra trikampio vidurinė linija. Todėl $A_1B_1 \parallel AB$ ir $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

Vadinasi, trikampiai AOB ir A_1OB_1 yra panašūs. Todėl jų kraštinės yra proporcingos: $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. Kadangi $AB = 2A_1B_1$, tai ir $AO = 2OA_1$, $BO = 2OB_1$. Taigi pusiaukraštinių AA_1 ir BB_1 susikirtimo taškas O kiekvieną jų dalija santykiu 2 : 1, skaičiuojant nuo trikampio viršūnių.

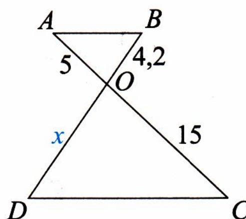
Nubrėžę trečią pusiaukraštinę CC_1 įsitikintume, kad pusiaukraštinių AA_1 ir CC_1 susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija santykiu 2 : 1, pradedant nuo viršūnės, taigi jis sutampa su tašku O.

499. Raskite x, jeigu $AB \parallel CD$:

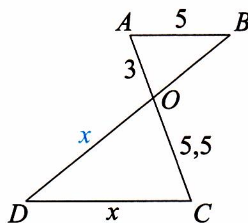
a)



b)

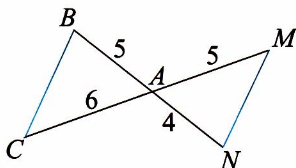


c)

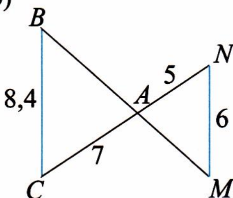


500. Ar lygiagrečios tiesės BC ir MN?

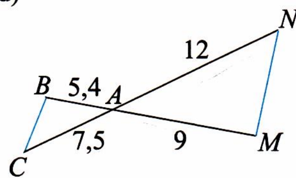
a)



b)



d)



501. Stačiojo trikampio aukštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės, trikampį dalija į du stačiuosius trikampius. Įrodykite, kad visi trys trikampiai panašūs.

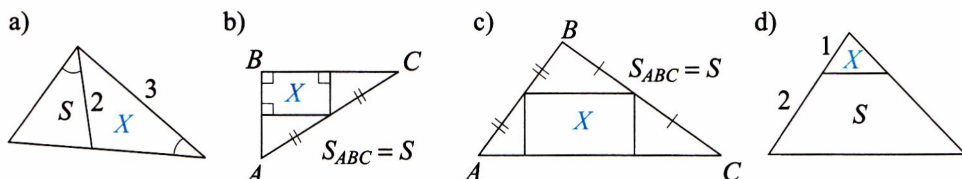
502. Iš stačiojo trikampio stačiojo kampo viršūnės nubrėžta aukštinė. Įrodykite, kad ji yra gautų įžambinės atkarpų geometrinis vidurkis.

503. Ar panašūs trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, jeigu:
a) $AB = 12$, $BC = 9$, $AC = 15$, $A_1B_1 = 21$, $B_1C_1 = 26$, $A_1C_1 = 26$;
b) $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 14$, $A_1B_1 = 12$, $B_1C_1 = 15$, $A_1C_1 = 21$?

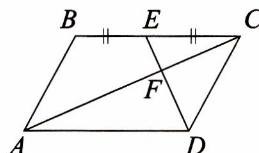
504. a) Medžio šešėlio ilgis lygus 71,5 m. Šalia stovinčio žmogaus, kurio ūgis 1,7 m, šešėlio ilgis yra 4,25 m. Raskite medžio aukštį.
b) Gamyklos dūmtraukio šešėlio ilgis lygus 32,5 m, o netoliese esančio stulpo, kurio ilgis 2,4 m, šešėlio ilgis lygus 2,72 m. Raskite dūmtraukio aukštį.

505. Raskite stačiojo trikampio plotą, jeigu aukštinė įžambinę dalija į 32 cm ir 18 cm ilgio atkarpas.

506*. Raskite plotą X.



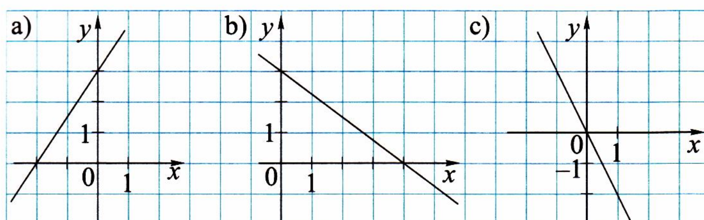
507. $ABCD$ — lygiagretainis.
Raskite $\frac{S_{AFD}}{S_{EFC}}$.



508. a) Trikampių plotai yra 32,4 cm^2 ir 54 cm^2, o jų trumpiausios kraštinės — 5,4 cm ir 9 cm. Ar trikampiai panašūs?
b) Trikampių plotai yra 72 dm^2 ir 32 dm^2, o jų ilgiausios kraštinės — 12,6 dm ir 8,4 dm. Ar trikampiai panašūs?

509. Trikampiai ABC ir KLM panašūs. Raskite:
a) jų plotus, jeigu
$\frac{P_{ABC}}{P_{KLM}} = \frac{4}{5}$, $S_{ABC} + S_{KLM} = 410$;
b) jų perimetrus, jeigu
$S_{ABC} = 180$, $S_{KLM} = 80$, $P_{ABC} + P_{KLM} = 240$;
c) jų plotus, jeigu
$\frac{P_{ABC}}{P_{KLM}} = \frac{3}{2}$, $S_{ABC} - S_{KLM} = 40$;
d) jų perimetrus, jeigu
$S_{ABC} = 180$, $S_{KLM} = 80$, $P_{ABC} - P_{KLM} = 85$.

510. Raskite funkcijos $f(x) = kx + l$ koeficientus k ir l.



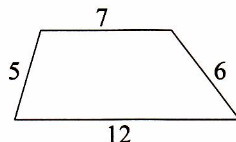
511. a) Iš 20 m aukščio paleidžiamas rutuliukas ir stebimas laikas, per kurį jis nukris ant žemės. Gauti tokie 5 metimų rezultatai: 1,98 s; 1,97 s; 2,00 s; 2,04 s; 2,01 s. Apskaičiuokite rutuliuko kritimo vidutinį laiką.

b) Rutuliukas buvo paleidžiamas iš skirtingų aukščių ir gauti rezultatai surašyti lentelėje:

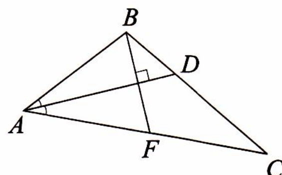
H (m)	8	10	20	50	100	150
T (s)	1,26	1,41	2,00	3,16	4,47	5,48

Koordinačių plokštumoje atidėkite taškus $M(T, H)$. Gautus taškus nuosekliai sujunkite. Kokią kreivę gavote?

512. Raskite trapecijos plotą.



513. Duota: $\angle BAC = 60°$, $AB = 6$ cm, $\angle BAD = \angle DAC$, $BF \perp AD$. Apskaičiuoti: $\triangle ABF$ plotą.



514. Keliais būdais galima išsirinkti pietus iš 4 patiekalų pateiktame valgiaraštyje? Nubraižykite galimybių medį.

I. Šalti patiekalai: pomidorų salotos, virti kiaušiniai, silkė.

II. Sriubos: pieniška, burokėlių, kopūstų.

III. Karšti patiekalai: dešrelės, pjausnys.

IV. Desertas: ledai, kompotas.

515. Raskite koordinates taškų, kuriuose susikerta parabolė $y = x^2 - 4$ ir tiesė:

a) $x = 1$; b) $y = 1$; c) $y = x + 2$; d) $y = 3x$.

516. Nurodykite, kur yra visi koordinačių plokštumos taškai, kurių abscisės yra lygios ordinatėms.

517. Parašykite lygtį tiesės, kuri eitų per koordinačių pradžią ir būtų lygiagreti tiesei:

a) $2x - y + 1 = 0$; b) $-3x + y - 4 = 0$.

518. a) Kvadrato kraštinė lygi m. Kam lygi jo įstrižainė?

b) Kvadrato įstrižainė lygi m. Kam lygi jo kraštinė?

519. Apskaičiuokite patogiausiu būdu:

a) $\dfrac{\left(12\frac{5}{7}\right)^2 + \left(17\frac{2}{7}\right)^2}{2} + 12\dfrac{5}{7} \cdot 17\dfrac{2}{7}$; b) $\dfrac{\left(23\frac{1}{16}\right)^2 + \left(21\frac{1}{16}\right)^2}{2} - 23\dfrac{1}{16} \cdot 21\dfrac{1}{16}$.

520. Jeigu pelnas yra tarp 70 Lt ir 80 Lt, o pajamos — 950 Lt, tai prekybos kaštai yra:

A mažesni už 1030 Lt
B tarp 1020 Lt ir 1030 Lt
C tarp 860 Lt ir 890 Lt
D didesni už 870 Lt
E tarp 870 Lt ir 880 Lt

521. Metami du lošimo kauliukai ir suskaičiuojama iškritusių akučių suma. Kuris iš įvykių A ir B labiau tikėtinas?

a) A — iškritusių akučių suma lygi 3;
B — iškritusių akučių suma lygi 4;

b) A — iškritusių akučių suma — trijų kartotinis;
B — iškritusių akučių suma — keturių kartotinis.

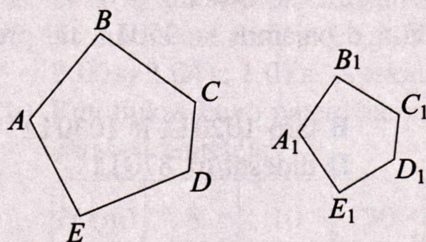
522. Arabų pasakų rinkinio „Tūkstantis ir viena naktis“ pavadinime minimą skaičių 1001 išskaidykite pirminiais dauginamaisiais ir surašykite visus šio skaičiaus daliklius.



7 Daugiakampių panašumas

Daugiakampių panašumas apibrėžiamas panašiai kaip ir trikampių panašumas.

Du daugiakampiai yra panašūs, jeigu vieno daugiakampio kraštinės yra proporcingos atitinkamoms kito daugiakampio kraštinėms, o tų daugiakampių atitinkami kampai yra lygūs.



Pavyzdžiui, daugiakampis $ABCDE$ panašus į daugiakampį $A_1B_1C_1D_1E_1$, jeigu

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1} = k,$$

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,$$

$$\angle D = \angle D_1,\ \angle E = \angle E_1.$$

Akivaizdu, kad panašiųjų daugiakampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui:

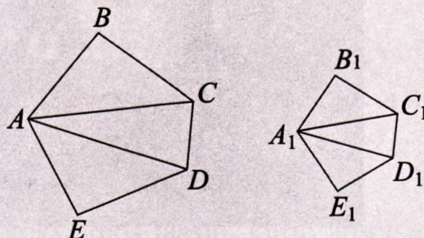
$$\frac{P_{ABCDE}}{P_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = k.$$

O kam lygus panašiųjų daugiakampių plotų santykis?
Nesunku įsitikinti, kad, iš bet kurių panašiųjų daugiakampių atitinkamų viršūnių nubrėžę įstrižaines, daugiakampius padalijame į panašius trikampius, t. y.

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1,$$

$$\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1,$$

$$\triangle ADE \backsim \triangle A_1D_1E_1.$$



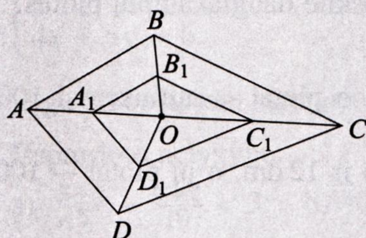
Žinome, kad $S_{ABC} = k^2 S_{A_1B_1C_1}$, $S_{ACD} = k^2 S_{A_1C_1D_1}$ ir $S_{ADE} = k^2 S_{A_1D_1E_1}$. Sudėję šias lygybes gauname:

$$S_{ABCDE} = k^2 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1E_1}, \quad \text{t. y.} \quad \frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = k^2.$$

Taigi panašiųjų daugiakampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

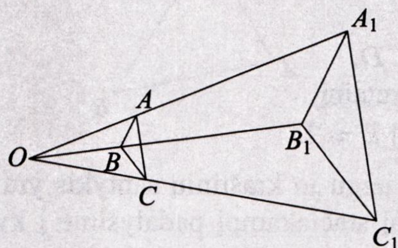
1 užduotis.

1) Nubraižykite bet kokį keturkampį $ABCD$. Jo viduje pažymėkite tašką O ir nubrėžkite spindulius OA, OB, OC ir OD.
2) Spindulyje OA atidėkite atkarpą $OA_1 = \frac{1}{2}OA$, spindulyje OB — atkarpą $OB_1 = \frac{1}{2}OB$, spindulyje OC — atkarpą $OC_1 = \frac{1}{2}OC$ ir spindulyje OD — atkarpą $OD_1 = \frac{1}{2}OD$.
3) Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra panašus į keturkampį $A_1B_1C_1D_1$.
4) Raskite panašumo koeficientą.



2 užduotis.

1) Nubraižykite bet kokį trikampį ABC ir šalia jo pažymėkite tašką O.
2) Iš taško O nubrėžkite spindulius OA, OB, OC ir juose atidėkite atkarpas $OA_1 = 3OA$, $OB_1 = 3OB$ ir $OC_1 = 3OC$.
3) Įrodykite, kad $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.
4) Raskite panašumo koeficientą.



Pratimai ir uždaviniai

523. Penkiakampio kraštinės yra 28 cm, 30 cm, 22 cm, 8 cm ir 18 cm. Raskite į jį panašaus penkiakampio perimetrą, jeigu:
a) trumpiausia kraštinė lygi 12 cm;
b) ilgiausia kraštinė lygi 21 cm.

524. Panašiųjų keturkampių perimetrų suma lygi 22,5 dm. Raskite keturkampių perimetrus, jeigu panašumo koeficientas:
a) $k = 1{,}25$; b) $k = 0{,}5$; c) $k = 1{,}5$; d) $k = 0{,}(6)$.

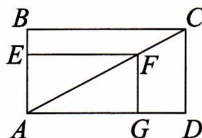
525. Panašiųjų penkiakampių perimetrų skirtumas 28 dm. Apskaičiuokite penkiakampių perimetrus, jeigu jų trumpiausios kraštinės atitinkamai lygios 12,5 dm ir 5 dm.

526. Panašiųjų daugiakampių plotų suma lygi 2442 cm^2. Raskite daugiakampių plotus, jeigu panašumo koeficientas:
a) $k = 1{,}4$; b) $k = 0{,}5$.

527. Panašiųjų daugiakampių plotų skirtumas yra 264 cm^2, o jų ilgiausios kraštinės lygios 12,5 cm ir 18 cm. Raskite daugiakampių plotus.

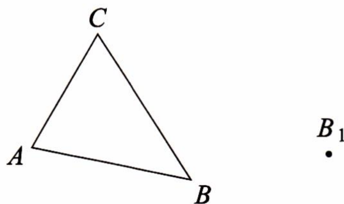
528. Ar panašūs du daugiakampiai, jeigu:
a) jų perimetrai lygūs 45 m ir 72 m, o plotai — atitinkamai 100 m^2 ir 256 m^2?
b) jų ilgiausios kraštinės lygios 8 dm ir 12 dm, o jų plotai — 100 m^2 ir 570 m^2?

529. Keturkampis $ABCD$ — stačiakampis, $EF \parallel BC$, $FG \parallel CD$. Įrodykite, kad stačiakampis $ABCD$ panašus į stačiakampį $AEFG$.



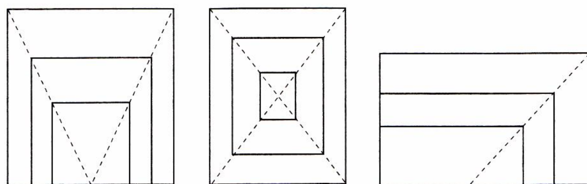
530. Ar gali kvadratas ir rombas būti panašūs? Atsakymą pagrįskite.

531. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.
a) Nubraižykite trikampį $A_1B_1C_1$, kai žinomas tik vienas jo taškas B_1 ir:
1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$.
b) Nubraižykite lygiagretainį $ABCD$. Nubraižykite panašų į jį lygiagretainį $A_1B_1C_1D_1$, kai: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = 2$.



532*. Stačiakampis vadinamas auksiniu, jeigu jo kraštinių santykis yra aukso pjūvis. Įrodykite, kad jeigu auksinį stačiakampį padalysime į kvadratą ir mažesnį stačiakampį, tai pastarasis taip pat bus auksinis.

533. Kuriuose brėžiniuose pavaizduoti panašūs stačiakampiai?



534. Parabolės $y = a(x+m)^2+n$ viršūnės taško koordinatės yra $(-5;\ 2)$. Raskite a, m ir n, jeigu žinoma, kad taškas $A(-1;\ -14)$ priklauso parabolei.

535. Raskite tokias a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema

$$\begin{cases} 7x + 2y = 11, \\ ax + 7y = 22 \end{cases}$$

a) turėtų vieną sprendinį; b) turėtų be galo daug sprendinių.

536. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + cy = 11, \\ 4x + 6y = 6, \end{cases}$$

jeigu žinoma, kad pirmosios lygties vienas iš sprendinių yra $(2;\ 1)$.

537. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{3+x}{5} - \frac{4+x}{10} < 3$; b) $\frac{2-x}{3} - 1 \geqslant \frac{3-x}{6}$.

538. Ar ekvivalenčios lygčių sistemos:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 2x + 8y = 9 \end{cases}$ ir $\begin{cases} 6x + 8y = 10, \\ 4x + 16 = 18? \end{cases}$

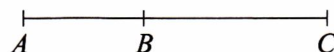
b) $\begin{cases} 7x + y = 1, \\ 4x - y = 4 \end{cases}$ ir $\begin{cases} 7x + y = 1, \\ x - 4y = 4? \end{cases}$

Pasitikrinkite

1. Raskite:

a) BC, jei $AB = 5$ cm ir $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{2}$;

b) AB ir BC, jei $AC = 14$ cm ir $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$.

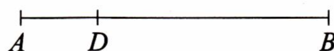


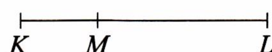
2. a) Lygiagretainio $ABCD$ perimetras lygus 42 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio kraštines, jeigu $\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{AC}$; čia O — lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas.

b) Taškas D yra trikampio ABC kraštinėje AC. Apskaičiuokite santykį $\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}}$, jeigu $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm ir $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC}$.

3. Duota: $\frac{AD}{AB} = \frac{KM}{KL}$.

Įrodyti: a) $\frac{AD}{DB} = \frac{KM}{ML}$; b) $\frac{DB}{AB} = \frac{ML}{KL}$.



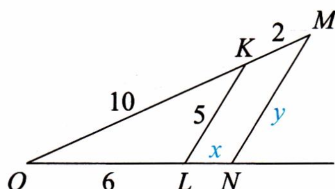


4. Apskaičiuokite x, kai atkarpa MN yra atkarpų AB ir BC geometrinis vidurkis.

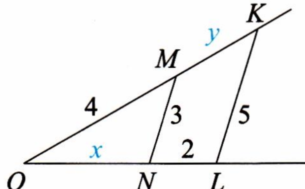


5. Raskite x ir y, jeigu $KL \parallel MN$ (brėžiniuose mastelis neišlaikytas).

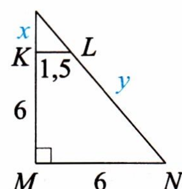
a)



b)

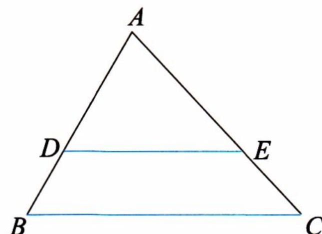


c)



6. Užpildykite lentelę, jei $DE \parallel BC$ (brėžinyje mastelis neišlaikytas).

	AD	DB	AB	AE	EC	AC	DE	BC
a)	7	8				15		22,5
b)	6	9		8			10	
c)		5	9	6				18
d)			21	12		28	18	



7. Trikampio vidurinė linija lygi 15 cm, o plotas — 180 cm^2. Raskite trikampio aukštinę, statmeną tai vidurinei linijai.

8. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinių vidurio taškai M, N, K ir L nuosekliai sujungti atkarpomis.

a) Įrodykite, kad keturkampis $MNKL$ yra lygiagretainis.

b) Raskite lygiagretainio $MNKL$ perimetrą, jeigu $AC + BD = 80$ cm.

9. a) Trapecijos vienas pagrindas lygus 5 cm, o vidurinė linija — 9 cm. Raskite kitą trapecijos pagrindą.

b) Trapecijos vidurinė linija lygi 8 cm, o pagrindų skirtumas — 6 cm. Raskite trapecijos pagrindus.

c) Trapecijos vidurinė linija lygi 9 cm, o pagrindų ilgių santykis — $\frac{1}{2}$. Raskite trapecijos pagrindus.

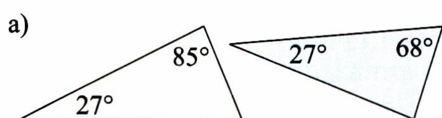
d) Lygiašonės trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus 3,7 dm, o šoninė kraštinė su pagrindu sudaro 60° kampą ir lygi 1,5 dm. Apskaičiuokite trapecijos vidurinę liniją.

10. a) Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 6$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 15$ cm. AD — kampo A pusiaukampinė. Apskaičiuokite atkarpų BD ir DC ilgius.

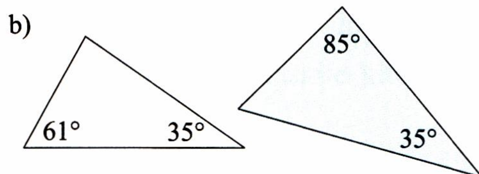
b) Trikampio ABC plotas lygus 75 cm^2, $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm. AD — kampo A pusiaukampinė. Apskaičiuokite trikampių ABD ir ADC plotus.

11. Ar panašūs trikampiai?

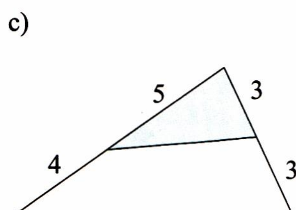
a)



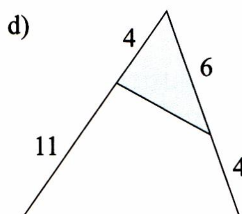
b)



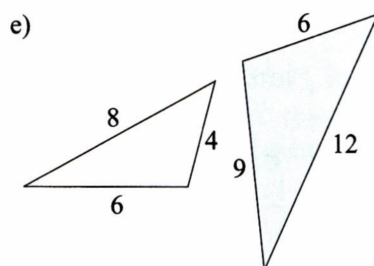
c)



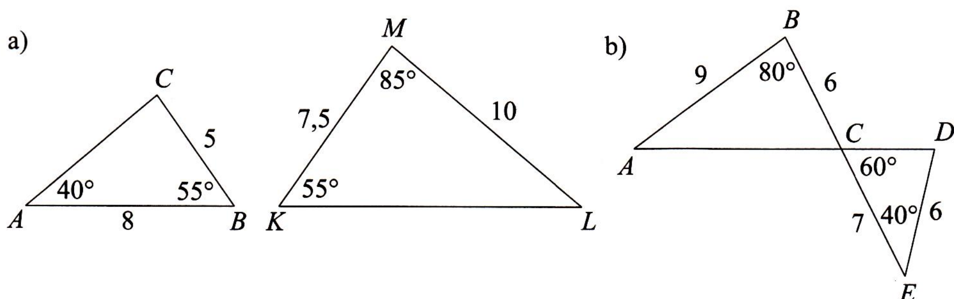
d)



e)

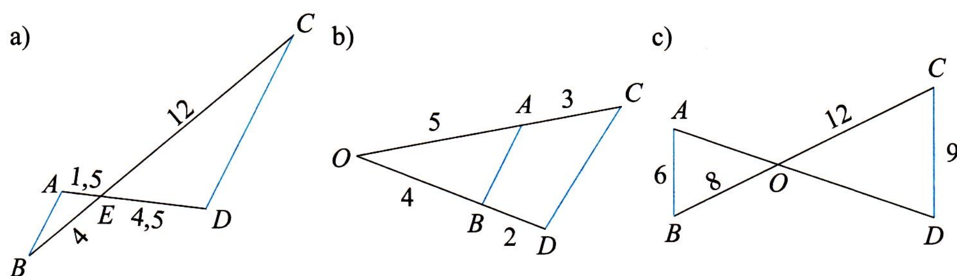


12. Raskite nežinomas trikampių kraštines.

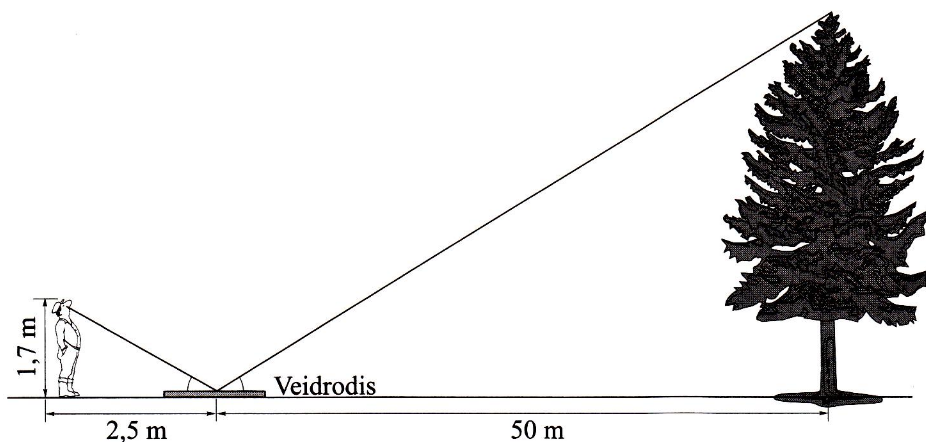


13. Vienas geležinkelio pervažos užkardo (šlagbaumo) petys lygus 5 m, o kitas — 1 m. Užkardas yra horizontalioje padėtyje 0,75 m nuo žemės paviršiaus. Kai jis pakeliamas, trumpesniojo peties galas pasiekia žemės paviršių. Į kokį aukštį nuo žemės paviršiaus pakyla ilgesniojo peties galas?

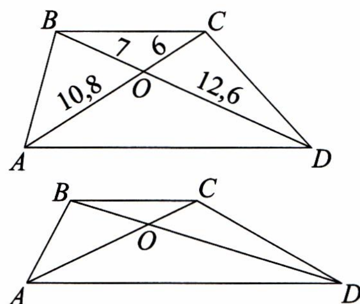
14. Ar lygiagrečios tiesės AB ir CD?



15. Objekto aukštį galima surasti naudojantis veidrodžiu. Pagal brėžinio duomenis nustatykite medžio aukštį (brėžinyje mastelis neišlaikytas).



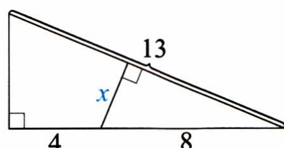
16. a) Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra trapecija.



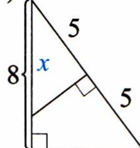
b) $ABCD$ — trapecija, $BC = 4$ cm, $AD = 10$ cm, $AC = 7$ cm, $BD = 14$ cm.
Raskite: AO, OC, BO, OD.

17. Raskite x:

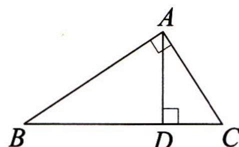
a)



b)



18. Įrodykite, kad:



a) $AB^2 = BD \cdot BC$; b) $AC^2 = DC \cdot BC$.

c) Remdamiesi a) ir b) įsitikinkite, kad $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

19. a) Panašiųjų trikampių panašumo koeficientas $k = 0{,}6$, o jų perimetrų suma lygi 240 cm. Apskaičiuokite trikampių perimetrus.

b) Panašiųjų trikampių trumpiausios kraštinės lygios 18,5 cm ir 7,4 cm, o perimetrų skirtumas yra 150 cm. Apskaičiuokite trikampių perimetrus.

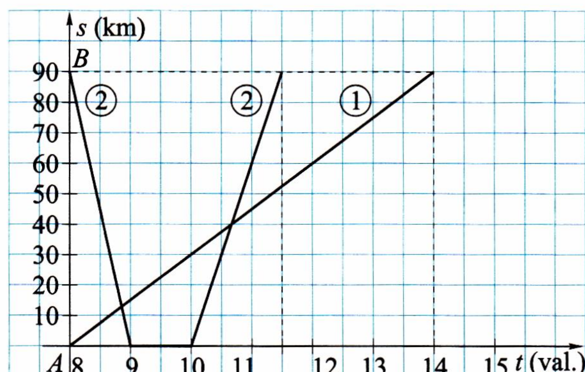
20. a) Panašiųjų daugiakampių plotų skirtumas lygus 264 cm^2, o jų ilgiausios kraštinės lygios 12,5 cm ir 15 cm. Raskite daugiakampių plotus.

b) Panašiųjų daugiakampių plotai lygūs 243 cm^2 ir 27 cm^2. Viena mažesniojo ploto daugiakampio kraštinė lygi 7,6 cm. Raskite kito daugiakampio atitinkamos kraštinės ilgį.

21. a) Statinė su aliejumi sveria 241,8 kg. Pačios statinės masė sudaro 4% aliejaus masės. Sumažinus aliejaus kainą 40% aliejaus buvo parduota už 750 Lt. Kokia pradinė aliejaus 1 ℓ kaina, jeigu aliejaus tankis 930 kg/m^3?

b) Už 625 Lt į restoraną buvo atvežta statinė alaus (kaina be taros), kuri svėrė 273 kg. Statinės masė sudaro 5% alaus masės. Kiek restorane kainuoja 0,5 ℓ alaus, jeigu alaus tankis 1040 kg/m^3, o restorane taikomas 120% antkainis?

22. Atstumas tarp miestų A ir B lygus 90 km. Brėžinyje pavaizduoti dviratininko (1 grafikas) ir automobilio (2 grafikas) važiavimo grafikai.



a) Kokiu greičiu iš A į B važiavo dviratininkas?
b) Kokiu greičiu važiavo iš B į A ir iš A į B automobilis?
c) Kelintą valandą susitiko dviratininkas ir automobilis ir koks atstumas buvo tuo metu nuo jų iki A?
d) Kelintą valandą automobilis pavijo dviratininką grįždamas iš A į B?
e) Koks atstumas tarp dviratininko ir automobilio buvo 11 val.?

23. Trikampio ABC viršūnės B koordinatės $(-1; -1)$, o kraštinių AB ir CB vidurio taškų koordinatės $M(1; 0{,}5)$, $N(5; -3{,}5)$. Apskaičiuokite trikampio ABC perimetrą.

24. Raskite koordinates taškų, kuriuose susikerta parabolė $y = 1 - x^2$ ir tiesė:
a) $y = x - 1$; b) $y = -x - 1$.

25. Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus, kurių koordinatės:
a) $(0; 0)$ ir $(3; 4)$; b) $(-3; -1)$ ir $(1; 1)$.

26. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 3x - 2y = -7, \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$
a) keitimo būdu; b) sudėties būdu.

27. Suprastinkite reiškinį $(2x + 5)^2 - 5(x + 5) - \left(\frac{1}{15}\right)^{-1}x$ ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai:
a) $x = -2$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = \sqrt{2}$; *d) $x = 1 + \sqrt{2}$.

28. Išspręskite nelygybę:
a) $x(x - 3) - 6 > (4 + x)^2$; b) $(x - 5)^2 \leqslant (x - 1)(x + 2) + 16$.

29. Dviejų natūraliųjų skaičių suma lygi 596. Vienas šių skaičių baigiasi skaitmeniu 2. Jeigu šį skaitmenį nubrauktume, tai gautume kitą skaičių. Raskite šiuos skaičius.

5 KVADRATINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS



1 Kvadratinė lygtis. Nepilnųjų kvadratinių lygčių sprendimas

Iki šiol sprendėme lygtis, kuriose nežinomasis buvo pirmojo laipsnio (tiesines lygtis), pavyzdžiui: $5x = 23$, $2x + 7 = 0$, $\frac{1}{3}x - 1 = 10$ ir pan.

? Ką vadiname lygties sprendiniu?

Taip pat sprendėme lygtis, kurios nėra tiesinės, pavyzdžiui, $(x-2)(3-x) = 0$. Kairėje šios lygties pusėje yra du dauginamieji: $(x - 2)$ ir $(3 - x)$.

Sandauga lygi nuliui tik tada, kai bent vienas dauginamasis lygus nuliui.

Pasinaudoję šia sandaugos savybe raskime lygties

$$(x - 2)(3 - x) = 0$$

sprendinius:

arba $x - 2 = 0$, arba $3 - x = 0$,
$x = 2$, $x = 3$.

Vadinasi, lygtis turi du sprendinius $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Panašiai spręsime ir lygtis, kuriose nežinomasis yra antrojo laipsnio (kvadratines lygtis).

Lygtis, kurią galima užrašyti pavidalu $ax^2 + bx + c = 0$, čia x — nežinomasis, a, b, c — skaičiai ir $a \neq 0$, vadinama kvadratine.

Pavyzdžiui, kvadratinės yra lygtys:

$$13x^2 = 0, \quad 5x^2 - 11 = 0, \quad 3x^2 - 27x = 0, \quad x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Matome, kad jose nežinomasis yra antrojo laipsnio.

? Kodėl lygtis $(x - 2)(3 - x) = 0$ yra kvadratinė?

1 UŽDAVINYS. Stačiakampio formos sodo ilgis 5 kartus didesnis už plotį, o plotas lygus 720 m^2. Koks sodo ilgis ir plotis?

Sprendimas. Sodo plotį pažymėkime x metrų. Tada jo ilgis bus $5x$ metrų, o plotas lygus $5x \cdot x = 5x^2$ (m^2). Pagal sąlygą

$$5x^2 = 720,$$

$$5x^2 - 720 = 0 \Big| : 5,$$

$$x^2 - 144 = 0.$$

Matome, kad kairiąją lygties pusę galima išskaidyti dauginamaisiais pagal kvadratų skirtumo formulę $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$x^2 - 12^2 = 0, \qquad (x - 12)(x + 12) = 0.$$

Sandauga lygi 0 tik tada, kai nors vienas dauginamasis lygus 0:

$$\text{arba} \quad x - 12 = 0, \quad \text{arba} \quad x + 12 = 0,$$
$$x = 12, \qquad\qquad x = -12.$$

Pagal uždavinio sąlygą sodo plotis x gali būti tik teigiamas, todėl lygties sprendinys $x = -12$ netinka.

Uždavinio sąlygą tenkina tik lygties sprendinys $x = 12$. Tad sklypo ilgis lygus $5 \cdot 12 = 60$ (m). Iš tikrųjų, sklypo plotas lygus $12 \cdot 60 = 720$ (m^2).

Atsakymas. 60 m ir 12 m.

2 UŽDAVINYS. Kokio teigiamojo skaičiaus ir jo kvadrato suma 7 kartus didesnė už patį skaičių?

Sprendimas. Sakykime, kad tas skaičius yra x. Tada jo kvadratas yra x^2, o jų suma bus $x + x^2$. Pagal sąlygą $x + x^2 = 7x$. Išsprendžiame gautąją kvadratinę lygtį:

$$x + x^2 - 7x = 0, \qquad x^2 - 6x = 0.$$

Išskaidykime kairiąją lygties pusę dauginamaisiais prieš skliaustus iškeldami x:

$$x(x - 6) = 0.$$

Sandauga lygi 0 tik tada, kai nors vienas dauginamasis lygus 0:

$$\text{arba} \quad x = 0, \quad \text{arba} \quad x - 6 = 0, \quad x = 6.$$

Pagal uždavinio sąlygą tinka tik $x = 6$.

Atsakymas. 6.

Jei kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ bent vienas iš koeficientų b, c lygus nuliui, tai tokia lygtis vadinama *nepilnąja kvadratine lygtimi*. Jei kvadratinės lygties nė vienas koeficientas nelygus nuliui ($b \neq 0$ ir $c \neq 0$), tai ji vadinama *pilnąja*.

Kvadratinė lygtis gali turėti du sprendinius, vieną sprendinį arba neturėti sprendinių.

Įsitikinkime, kad, pavyzdžiui, lygtis $-2x^2 - 8 = 0$ sprendinių neturi:

$$-2x^2 - 8 = 0 \mid : (-2),$$
$$x^2 + 4 = 0 \mid +(-4),$$
$$x^2 = -4.$$

Nėra tokio skaičiaus, kurį pakėlę kvadratu gautume neigiamą skaičių (-4). Vadinasi, lygtis $-2x^2 - 8 = 0$ sprendinių neturi.

Akivaizdu, kad lygtis $x^2 = 0$ turi vieną sprendinį $x = 0$. Tiesa, lygtį parašius pavidalu $x \cdot x = 0$ galima įžvelgti du sprendinius: $x_1 = 0$ ir $x_2 = 0$. Todėl kartais sakoma, kad ši lygtis turi du lygius sprendinius (kartotinį sprendinį).

Pavidalas	Sprendinių skaičius	Sprendiniai
$ax^2 + c = 0$	Kai a ir c yra skirtingų ženklų — du	$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$
	Kai a ir c yra vienodų ženklų — nėra	—
$ax^2 + bx = 0$	Du	$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	Vienas	$x = 0$

Pratimai ir uždaviniai

539. Kurios lygtys yra pirmojo laipsnio, o kurios — antrojo laipsnio?

a) $2x + 3 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$ c) $3^2 - 3x = 0$
d) $-x^2 + 16 = 0$ e) $\frac{1}{2}x + 8 = 0$ f) $3x^2 - 8x = 0$
g) $x^2 + x + 1 = 0$ h) $-5x = 3x - x^2$ *i) $2x(x - 1) = (x - 2)x + x^2$

540. Užrašykite tris kvadratinių lygčių pavyzdžius.

541. Išspręskite lygtis:

a) $x^2 = 1$ b) $16x^2 = 0$ c) $x^2 - 9 = 0$
d) $x^2 = \frac{4}{9}$ e) $x^2 - 10 = 39$ f) $x^2 + 5 = 30$
g) $4x^2 - x = 0$ h) $-x^2 + 7x = 0$ i) $3x^2 = -9x$

542. Išspręskite lygtis ir nurodykite, kurios iš jų neturi sprendinių:

a) $19 + x^2 = 10$ b) $\frac{1}{2}x^2 = 18$ c) $-5x^2 = 1{,}8$
d) $16 + y^2 = 0$ e) $-5y^2 = \frac{1}{20}$ f) $y^2 = -25$

543. Išskaidykite dauginamaisiais ir raskite lygties sprendinius:

a) $3x^2 - 4x = 0$ b) $-5x^2 + 6x = 0$ c) $5x^2 = 7x$
d) $10x^2 + 7x = 0$ e) $4y^2 = 3y$ f) $6z^2 = z$
g) $2x + x^2 = 0$ h) $7u - 14u^2 = 0$ i) $3x^2 - 27 = 0$
j) $y^2 - 25 = 0$ *k) $4u^3 + u^2 = 0$ *l) $z(z + 2) + 3(z + 2) = 0$

544*. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = g(x)$, kai:
a) $f(x) = 2x^2 + 7$, $g(x) = 15$; b) $f(x) = 2x$, $g(x) = -x^2$.

545. a) Išspręskite lygtį $5x - \frac{2}{7}x^2 = 0$.
A $\frac{2}{35}$; **B** 0; $\frac{2}{35}$ **C** 17,5 **D** 0; 17,5
b) Išspręskite lygtį $(x - 5)^2 = 5(9 - 2x)$.
A 0; $\sqrt{20}$ **B** $\sqrt{20}$ **C** $-\sqrt{20}$; $\sqrt{20}$ **D** Sprendinių nėra

546. Išspręskite lygtis:

a) $4x^2 + 6x = 9x^2 - 15x$ b) $13x + 7x^2 = 5x^2 + 8x$
c) $12x^2 - 5x = 9x^2 + 7x$ d) $8{,}5x - 3x^2 = 3{,}5x + 2x^2$
*e) $x(x - 15) = 3(108 - 5x)$ *f) $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$

547. Raskite kvadratinių lygčių sprendinius:
a) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(5x + 2) = 96$;
b) $(2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 - (4x - 9)(4x + 9) = 2(64 - 29x)$.

548. a) $y = x^2$. Su kuria x reikšme $y = 1$; $\frac{4}{25}$; 121; 13?
b) $y = 2x^2$. Su kuria x reikšme $y = 18$; 200; 2,88; $\frac{2}{9}$?

549. Atvirukas yra stačiakampio formos. Jo ilgis sudaro 75% pločio. Koks atviruko ilgis ir plotis, jei plotas yra 48 cm^2?

550. Ar kvadratinė lygtis $ax^2 + bx = 0$ gali neturėti sprendinių? Atsakymą pagrįskite.

551*. Stačiakampio sodo ilgis 5 kartus didesnis už plotį. Jei sodo plotį padidintume 9 m, tai jo plotas padidėtų 4 kartus. Kokie yra sodo matmenys?

552. Išspręskite lygtis nubraižę funkcijos $f(x) = x^2$ grafiką:
a) $x^2 = 1$; b) $x^2 = 5$; c) $x^2 = 4{,}5$; d) $x^2 = 8{,}5$.

553. Kampo A kraštines kerta dvi lygiagrečios tiesės BC ir DE (taškai B ir D yra vienoje kampo kraštinėje). Žinoma, kad $AB = 8\,\text{cm}$, $AD = 12\,\text{cm}$ ir $AC = 10\,\text{cm}$. Raskite AE.

554. Trapecijos pagrindų santykis yra $7 : 3$, o jų skirtumas lygus 32 cm. Raskite trapecijos vidurinės linijos ilgį.

555. Motorinė valtis Nemunu nuplaukė iš vieno miestelio į kitą ir apsisukusi iš karto grįžo atgal. Visa kelionė truko 5 valandas. Motorinės valties greitis pasroviui yra 18 km/h, o prieš srovę — 12 km/h. Kiek laiko valtis plaukė pasroviui ir kiek prieš srovę? Koks atstumas tarp miestelių?

556. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $y = (x + 5)^2$; b) $y = 2(x - 1)$; c) $y = -3(x - 6)^2$.

557. Koordinačių plokštumoje duoti taškai $A(-3; 4)$, $B(1{,}5; -8)$ ir $C(10; -1{,}2)$. Ar šie taškai priklauso tos pačios funkcijos $y = \frac{k}{x}$ grafikui?

558. Parašykite skaičius $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ didėjimo tvarka.

559. Mokykloje mokosi 1135 mokiniai. VI–XII klasėse mokosi 48%, o V klasėse — 12% visų mokyklos mokinių.

a) Kiek vaikų mokosi pradinėse klasėse?

b) Kiek procentų V–XII klasių mokinių sudaro pradinių klasių mokiniai?

560. Abiejose upės pusėse viena priešais kitą auga po palmę. Vienos palmės aukštis yra 30 m, o kitos — 20 m. Atstumas tarp jų yra 50 m. Kiekvienos palmės viršūnėje tupi paukštis. Staiga abu paukščiai pamato žuvį, išplaukusią į vandens paviršių. Abu paukščiai skrenda link žuvies ir pasiekia ją vienu metu. Kokiu atstumu nuo aukštesniosios palmės pasirodė žuvis, jei abiejų paukščių greitis vienodas?



2 Pilnosios kvadratinės lygties sprendimas

Nepilnąsias kvadratines lygtis patogu spręsti kairiąją lygties pusę išskaidžius dauginamaisiais. Taip galima spręsti ir pilnąsias kvadratines lygtis.

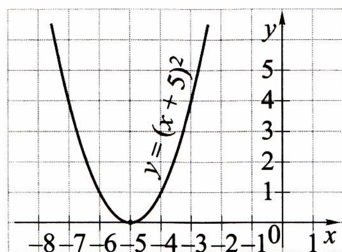
1 UŽDAVINYS. Išspręskime lygtį $x^2 + 10x + 25 = 0$.

Sprendimas. Pastebime, kad kairiąją lygties pusę galima parašyti kaip dvinario kvadratą pritaikius formulę $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2.$$

Gavome lygtį $(x + 5)^2 = 0$.
Žinome, kad tik nulį pakėlę kvadratu gauname nulį. Todėl $x + 5 = 0$, $x = -5$. Taigi $x = -5$ yra lygties sprendinys.

Išspręskime lygtį $(x + 5)^2 = 0$ grafiškai. Nubraižykime funkcijų $y = (x + 5)^2$ ir $y = 0$ grafikus. Parabolė ir tiesė (x ašis) turi vieną bendrą tašką, kurio koordinatės yra $(-5; 0)$. Tai reiškia, kad kvadratinės lygties $(x + 5)^2 = 0$ sprendinys yra $x = -5$.
Atsakymas. $x = -5$.



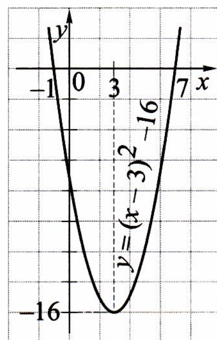
? Išspręskite lygtį $x^2 - 2x + 1 = 0$.

2 UŽDAVINYS. Išspręskime lygtį $x^2 - 6x - 7 = 0$.

Sprendimas. Kairiąją lygties pusę išskaidykime dauginamaisiais išskirdami dvinario kvadratą:

$$\underline{x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2} - 3^2 - 7 = 0,$$
$$\underline{x^2 - 6x + 9} - 9 - 7 = 0,$$
$$(x - 3)^2 - 16 = 0.$$

Kairiąją lygties pusę galima išskaidyti dauginamaisiais pagal kvadratų skirtumo formulę:



$$(x-3)^2-4^2=0,$$
$$\big((x-3)-4\big)\big((x-3)+4\big)=0,$$
$$(x-3-4)(x-3+4)=0,$$
$$(x-7)(x+1)=0,$$
arba $x-7=0$, arba $x+1=0$,
$x_1=7$, $x_2=-1$.

Išspręskime lygtį $(x-3)^2-16=0$ grafiškai. Nubraižykime funkcijos $y=(x-3)^2-16$ grafiką.
Parabolė kerta x ašį (tiesę $y=0$) taškuose $(-1; 0)$ ir $(7; 0)$. Vadinasi, kvadratinės lygties $(x-3)^2-16=0$ sprendiniai yra $x_1=-1$ ir $x_2=7$.
Atsakymas. -1; 7.

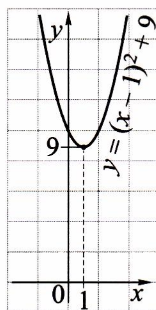
3 UŽDAVINYS. Išspręskime lygtį $x^2-2x+10=0$.

Sprendimas. Kairiąją lygties pusę skaidome dauginamaisiais kaip ir antrame uždavinyje:

$$\underline{x^2-2x+1}-1+10=0,$$
$$(x-1)^2+9=0.$$

Pastebime, kad $(x-1)^2 \geqslant 0$ ir $9>0$, tad su bet kuria x reikšme kairioji lygties pusė didesnė už nulį, t. y. $(x-1)^2+9>0$. Vadinasi, lygtis sprendinių neturi.

Išspręskime lygtį $(x-1)^2+9=0$ grafiškai. Nubraižykime funkcijos $y=(x-1)^2+9$ grafiką.
Parabolė x ašies nekerta, todėl sprendinių nėra.
Atsakymas. Sprendinių nėra.



Išsprendę uždavinius pastebėjome, kad kvadratinė lygtis gali:
a) turėti du sprendinius;
b) vieną sprendinį;
c) neturėti sprendinių.
Taip pat matėme, kad sprendžiant grafiškai šie trys atvejai atitinka atvejus, kai parabolė:
a) kertasi su x ašimi;
b) liečia x ašį;
c) su x ašimi neturi bendrų taškų.

Pratimai ir uždaviniai

561. a) Kurie iš skaičių 1; 2; 3; 4; 5 yra lygties $x^2 - 6x + 9 = 0$ sprendiniai?
b) Kurie iš skaičių 3; 5; 0; 11; 15; 20 yra lygties $x^2 - 14x = -33$ sprendiniai?

562. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais:

a) $x^2 - 4x + 4$ b) $x^2 - 8x + 16$ c) $x^2 + 18x + 81$
d) $x^2 - 10x + 25$ e) $t^2 - 2t + 1$ f) $x^2 + 2x - 35$

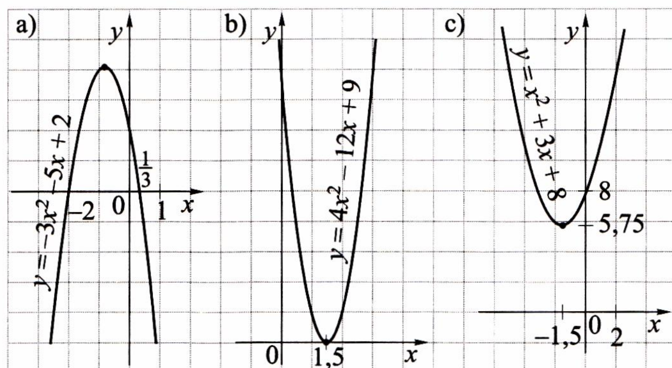
563. Išspręskite lygtis:

a) $(x + 3)^2 = 0$ b) $(x - 1)^2 - 4 = 0$ c) $2(x - 1)^2 = 0$
d) $(x - 5)^2 = 144$ e) $(x + 3)^2 = 121$ f) $(x + 2)^2 = 6$

564. Raskite lygties sprendinius:

a) $x^2 + 14x + 49 = 0$ b) $x^2 + 12x + 36 = 0$ c) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
d) $x^2 - 8x - 9 = 0$ e) $x^2 - 6x + 8 = 0$ f) $x^2 = x + 2$

565. Iš grafiko raskite lygties sprendinius:



566. Išspręskite lygtis, išskaidę kairiąją jos pusę dauginamaisiais:

a) $x^2 - 16x + 48 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 11 = 0$
c) $x^2 + 10x - 39 = 0$ d) $2x^2 + 4x - 21 = 0$

567. Išspręskite lygtis grafiškai:
a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $x^2 = 0{,}5x + 3$; c) $x^2 - 64 = 0$; d) $2x^2 - x = 0$.

568. Vienas stačiojo trikampio statinis 1 cm trumpesnis už įžambinę ir 1 cm ilgesnis už kitą statinį. Koks trikampio perimetras?

569. Stačiakampio ilgis 8 cm didesnis už plotį. Apskaičiuokite stačiakampio kraštines, jei jo plotas lygus $65\,cm^2$.

570. Tomas savo žaislinę raketą paleidžia nuo staliuko paviršiaus, esančio 50 cm virš žemės. Raketos aukštis h (metrais) po t sekundžių išreiškiamas formule $h = 50 + 45t - 5t^2$.
a) Po kiek sekundžių paleista raketa nukris ant žemės?
b) Nubraižykite raketos judėjimo grafiką.

571. Prie kvadrato formos skydo buvo pritvirtintas stačiakampio formos skydas, kurio plotis yra 1 m, o ilgis 2 kartus didesnis už kvadrato kraštinę. Kam lygi kvadrato kraštinė, jei abiejų skydų plotai lygūs?

572. Duotas reiškinys $K = (x-4)^2 + x(x-4)$.
a) Suprastinkite reiškinį K.
b) Išskaidykite reiškinį K dauginamaisiais.
c) Išspręskite lygtį $2(x-2)(x-4) = 0$.
d) Nubraižykite parabolę $y = K$.
*e) Kokia mažiausioji reiškinio K reikšmė?
*f) Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio K reikšmės yra neteigiamos?
*g) Kokias reikšmes įgyja reiškinys K intervale [0; 3]?

573. Išspręskite nepilnąsias kvadratines lygtis:

a) $x^2 = 0{,}49$	b) $x^2 = 37$	c) $2x^2 = 6{,}4$
d) $x^2 - 5x = 0$	e) $4a^2 + 3a = 0$	f) $25 - x^2 = 0$

574. 100 gramų sūrelio energinė vertė 300 kalorijų. Kokia šio sūrelio 30 gramų energinė vertė?

A 90 cal **B** 100 cal **C** 270 cal **D** 900 cal **E** 1000 cal

575. Trikampio kraštinės yra 28 cm, 35 cm, 42 cm. Trikampio, panašaus į duotąjį, perimetras lygus 15 cm. Raskite antrojo trikampio kraštines.

576. Duoti du iracionalieji skaičiai $3\sqrt{12}$ ir $2\sqrt{75}$. Raskite jų:
a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį; e) kvadratų sumą.

577. Jeigu visi miesto devintųjų klasių matematikos olimpiados dalyviai būtų pasodinti prie stalo po vieną, tai trūktų 8 stalų, o jeigu po du — liktų laisvi 7 stalai. Kiek mokinių dalyvauja devintųjų klasių matematikos olimpiadoje ir kiek yra stalų?

578. Užrašykite imtį variacine eilute ir raskite imties medianą:
a) 4, 2, 7, 4, 5, 1, 7; b) 3, 5, 7, 6, 9, 5, 8.

579. Pušinės stačiakampio gretasienio formos sijos masė yra 144 kg, o jos skersinio pjūvio matmenys — 18 cm × 25 cm. Koks sijos ilgis, jei jos tankis yra $0{,}4\,g/cm^3$?

3 Kvadratinės lygties sprendinių formulė. Diskriminantas

Sprendžiant kvadratines lygtis dažnai pravartu turėti formulę jų sprendiniams rasti. Išveskime kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, sprendinių formulę.

Padalijame visus lygties narius iš a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Iš trinario $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ išskiriame dvinario kvadratą:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{dvinario kvadratas}} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Gavome lygtį

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Panagrinėkime trupmeną $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Trupmenos vardiklyje yra reiškinys $4a^2$. Kadangi $a \neq 0$, tai $4a^2$ visada teigiamas. Vadinasi, trupmenos ženklas priklauso tik nuo skaitiklio ženklo. Skaitiklyje yra reiškinys $b^2 - 4ac$. Šis reiškinys gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas, tiek lygus nuliui. Reiškinys $b^2 - 4ac$ vadinamas kvadratinės lygties *diskriminantu* ir žymimas raide D.

Užrašome lygtį: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0$.

Nuo diskriminanto ženklo priklauso lygties sprendinių skaičius.

- Kai $D < 0$, tai turime lygtį:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \boxed{\text{teigiamas skaičius}} = 0.$$

  Ši lygtis sprendinių neturi.

- Kai $D = 0$, tai kvadratinė lygtis turi vieną sprendinį:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{0}{4a^2} = 0, \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

$$x + \frac{b}{2a} = 0, \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

- Kai $D > 0$, tai lygtis turi du sprendinius. Kairiąją lygties pusę išskaidykime dauginamaisiais:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{D}{4a^2}}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0,$$

$$\left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

Iš čia:

$$\text{arba} \quad x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a} = 0, \qquad \text{arba} \quad x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a} = 0,$$

$$x_1 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

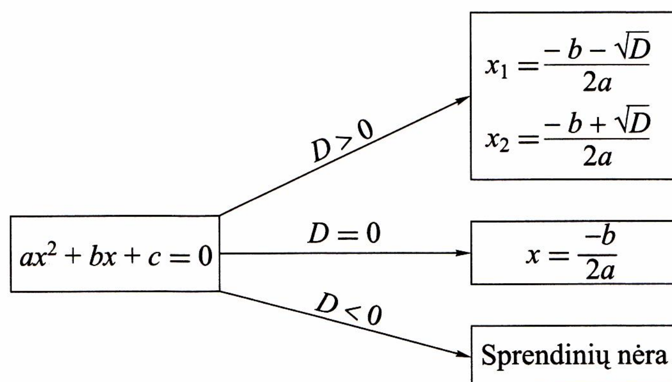
Taigi kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinius galima rasti pagal formules:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jas galima užrašyti kaip vieną formulę:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kvadratinės lygties sprendimą galima pateikti schema:



PAVYZDYS. Taikydami kvadratinės lygties sprendinių formulę išspręskime keletą kvadratinių lygčių:

a) $12x^2 + 7x + 1 = 0 \quad (a = 12, b = 7, c = 1)$;
$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1$. Diskriminantas yra teigiamas $(1 > 0)$, todėl lygtis turi du sprendinius:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7+\sqrt{1}}{2 \cdot 12} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}$;

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7-\sqrt{1}}{2 \cdot 12} = \frac{-7-1}{24} = -\frac{1}{3}$.

Atsakymas. $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3}$.

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0 \ (a = 9, b = -12, c = 4)$
$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$.
Diskriminantas lygus nuliui, todėl lygtis turi vieną sprendinį:

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Atsakymas. $\frac{2}{3}$.

c) $3x^2 - 2x + 7 = 0 \ (a = 3, b = -2, c = 7)$
$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -80$.
Diskriminantas yra neigiamas $(-80 < 0)$, todėl lygtis sprendinių neturi.

Atsakymas. Sprendinių nėra.

Pratimai ir uždaviniai

580. Pasakykite koeficientų a, b, c reikšmes:

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$
b) $2 + x + 2x^2 = 0$
c) $3 - 10x + 3x^2 = 0$
d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

581. Apskaičiuokite diskriminantą ir nurodykite sprendinių skaičių:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
b) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
c) $x^2 + 12x + 36 = 0$
d) $2x^2 + x + 67 = 0$

582. Persibraižykite ir užpildykite lentelę:

Kvadratinė lygtis	Diskriminantas $D = b^2 - 4ac$	Sprendinių skaičius	Sprendiniai	
			$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
$x^2 - 5x + 7 = 0$	-3	0	–	–
$x^2 - 3x - 5 = 0$	29	2	$x_1 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$	$x_2 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$
$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} = 0$				
$x^2 - 11x + 30 = 0$				
$x^2 - 20x + 5 = 0$				
$5x^2 - 5x + 10 = 0$				
$-3x^2 - 9x + 12 = 0$				
$4x^2 + 3x - 9 = 0$				
$2x^2 + 5x + 7 = 0$				
$3x^2 - 2x - 5 = 0$				

583. Išspręskite lygtis:

a) $x^2 + 12x + 35 = 0$
b) $x^2 + 2x + 2 = 0$
c) $x^2 - 2x - 5 = 0$
d) $x^2 + 14x + 24 = 0$
e) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
f) $3x^2 - 2x + 4 = 0$
g) $x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$
h) $x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 0$
k) $-x^2 - 2\frac{1}{2}x - 1 = 0$
l) $-x^2 - x + 1 = 0$

584. Kino teatre yra 1200 vietų, ir jis būna pilnas beveik visada. Bilietai kainuoja tik 6 Lt, tad savininkas nutarė padidinti kainą. Jis spėja, kad didinant bilieto kainą 0,5 Lt, netenkama 100 žiūrovų. Kokia bilietų kaina maksimaliai padidintų jo pajamas, jei savininko spėjimas teisingas?

585*. Išspręskite lygtis:

a) $(x+4)^2 = 3x + 40$ b) $(2x-3)^2 = 11x - 19$
c) $15x^2 + 17 = 15(x+1)^2$ d) $(x+1)^2 = (2x-1)^2$
e) $(x-2)^2 + 48 = (2-3x)^2$ f) $7x + 1 = 3x^2 - 2x + 1$
g) $-2x^2 + 5x + 6 = 4x^2 + 5x$ h) $(2x-3)^2 - (3x-2)^2 = 20(x-1)$

586. Išspręskite lygtis išskyrę pilnąjį kvadratą:
a) $x^2 + 18x + 81 = 0$; b) $x^2 - 7x + 12 = 0$; c) $x^2 + 3x - 4 = 0$.

587. Išspręskite lygtis grafiškai:
a) $\frac{9}{x} = x - 1$; *b) $x^2 = \frac{4}{x}$; c) $x^2 + 2x - 8 = 0$; d) $x^2 + 3x - 4 = 0$.

588. Išspręskite lygtis:

a) $3x^2 - 6 = 0$ b) $2x^2 + 5 = 0$ c) $5x^2 = 0$
d) $\frac{1}{4}x^2 - 2 = 0$ e) $x^2 = -5$ f) $6x^2 - 36 = 0$

589. Raskite stačiojo trikampio statinius, jei vienas jų 4 cm trumpesnis už kitą, o įžambinė lygi 20 cm.

590. a) Stačiakampio formos aikštelės ilgis 5 m didesnis už plotį, o plotas lygus 1800 m^2. Kokie aikštelės matmenys?
b) Stačiakampės lentos plotas yra 5400 cm^2. Nuo jos nupjautas stačiakampio formos gabalas, kurio plotą išreiškiantis skaičius (cm^2) lygus lentos plotį išreiškiančiam skaičiui (cm), o ilgis — 1,5 m. Likusi lentos dalis sudaro kvadratą. Raskite jo plotą.

591. Salėje iš viso yra 884 vietos. Vietų skaičius eilėje yra 8 vienetais didesnis už eilių skaičių. Kiek eilių yra salėje?

592. a) Išspręskite lygtį $(x-7)^2 = 25$.
A -2; 12 **B** 2; -12 **C** 2; 12 **D** 0; 12
b) Išspręskite lygtį $(4-3x)^2 = 25$.
A $-\frac{1}{3}$; 3 **B** $\frac{1}{3}$; -3 **C** 3 **D** 3; -3

593. Trikampio ABC kraštinės $AB = 15$ m ir $AC = 20$ m. Kraštinėje AB atidėta atkarpa $AD = 10$ m, o kraštinėje AC — atkarpa $AE = 12$ m. Ar trikampiai ABC ir ADE yra panašūs?

594. a) Trikampio perimetras lygus 19 cm. Šio trikampio kraštinių vidurio taškai sujungti atkarpomis. Raskite gautojo trikampio perimetrą.
b) Trikampio perimetras lygus 17 cm. Per šio trikampio viršūnes nubrėžtos tiesės, lygiagrečios priešais esančioms kraštinėms. Raskite gautojo trikampio perimetrą.

595. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} -2x + y = -1, \\ x + 3y = 11; \end{cases}$ *b) $\begin{cases} \dfrac{y+1}{3x-4} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{5x+y}{3x+11} = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$

596. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $y = -x + 5$; b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

597. Auksinio žiedo masė lygi 4,6 g. Kiek gramų gryno aukso yra žiede, jeigu aukso praba 585?

598. Nubrėžkite atkarpą, kurios ilgis būtų lygus:

a) $\sqrt{13}$ cm; b) $\sqrt{29}$ cm.

599. Legenda byloja, kad vienas gudročius Mahometo padėjėją žynį Chozratą Ali paklausė:
— Koks skaičius dalijasi be liekanos iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10?
Žynys nepasimetė:
— Padaugink savaitės dienų skaičių iš mėnesio dienų skaičiaus (30 dienų) ir dar metų mėnesių skaičiaus.
Ar teisus žynys? Kodėl?



4 Vijeto teorema

Redukuotosios kvadratinės lygties bendrasis pavidalas yra $x^2 + px + q = 0$, t. y. jos koeficientas prie x^2 lygus 1. Tokios lygtys yra, pvz., $x^2 + 8x - 1 = 0$, $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Jei kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ koeficientas prie x^2 nėra lygus 1, tai kiekvieną lygties narį padaliję iš a gausime redukuotąją kvadratinę lygtį $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Pažymėję $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, turime $x^2 + px + q = 0$.

Išspręskime redukuotąją kvadratinę lygtį $x^2 - 7x + 10 = 0$.

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \qquad D = 49 - 40 = 9 > 0,$$

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5.$$

Raskime gautų sprendinių sumą ir sandaugą:

$$x_1 + x_2 = 2 + 5 = 7, \quad x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 5 = 10.$$

Matome, kad sprendinių suma lygi lygties koeficientui prie x su priešingu ženklu (7), o sprendinių sandauga lygi laisvajam nariui (10).

Vijeto teorema. *Jei redukuotoji kvadratinė lygtis turi du sprendinius, tai jų suma lygi lygties koeficientui prie x su priešingu ženklu, o sprendinių sandauga lygi laisvajam nariui.*

Įrodymas. Ieškome redukuotosios kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendinių. Šios lygties diskriminantas $D = p^2 - 4q > 0$. Lygtis turi du sprendinius:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \quad \text{ir} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}.$$

Raskime sprendinių sumą ir sandaugą:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Gavome, jog

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Pastaba. Kai $D = 0$, galima sakyti, kad redukuotoji kvadratinė lygtis turi dvi lygias šaknis, tad Vijeto teoremą galima taikyti ir šiuo atveju.
Teisinga ir Vijeto teoremai *atvirkštinė teorema.*

Atvirkštinė Vijeto teorema. *Jei skaičių m ir n suma lygi $-p$, o jų sandauga lygi q, tai šie skaičiai yra lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendiniai.*

Įrodymas. Pagal sąlygą $m + n = -p$, o $m \cdot n = q$.
Vadinasi, lygtį $x^2 + px + q = 0$ galima užrašyti taip:

$$x^2 - (m+n)x + mn = 0.$$

Patikrinkime, ar skaičius m yra šios lygties sprendinys. Iš tikrųjų, vietoj x įrašę skaičių m gauname:

$$m^2 - (m+n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Vadinasi, skaičius m yra lygties sprendinys.

? Patikrinkite, kad skaičius n irgi yra lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendinys.

Taikant Vijeto ir jai atvirkštinę teoremas paprasta išspręsti, pavyzdžiui, tokius uždavinius:

1) sudaryti kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai yra duotieji skaičiai;
2) nustatyti kvadratinės lygties sprendinių ženklus nesprendžiant kvadratinės lygties;
3) rasti kvadratinės lygties sprendinius netaikant sprendinių formulės.

1 PAVYZDYS. Sudarykime redukuotąją kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.
Raskime sprendinių sumą: $x_1 + x_2 = 3 + (-5) = -2$,
ir sprendinių sandaugą: $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-5) = -15$.
Pagal Vijeto atvirkštinę teoremą kvadratinė lygtis bus tokia: $x^2 + 2x - 15 = 0$.
Pasitikrinkime, ar 3 ir -5 yra šios lygties sprendiniai:
$3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 9 + 6 - 15 = 0$; $(-5)^2 + 2 \cdot (-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 0$.

2 PAVYZDYS. Neieškodami lygties $x^2+7x-1=0$ sprendinių nustatykime jų ženklus.

Kadangi $D>0$, tai pagal Vijeto teoremą sprendinių sandauga lygi -1. Vadinasi, dauginamieji yra skirtingų ženklų. Taigi sprendiniai yra skirtingų ženklų.

3 PAVYZDYS. Netaikydami kvadratinės lygties sprendinių formulės raskime lygties $x^2-3x-4=0$ sprendinius.

Jei mums pavyktų atspėti du skaičius x_1 ir x_2, kurių suma būtų lygi 3, o sandauga lygi -4, tai pagal atvirkštinę Vijeto teoremą jie ir būtų lygties sprendiniai. Taigi galima užrašyti sistemą

$$\begin{cases} x_1+x_2=3, \\ x_1\cdot x_2=-4. \end{cases}$$

Kadangi $4=1\cdot 4=2\cdot 2$, tai nesunkiai galime atspėti tokias x_1 ir x_2 reikšmes, kad abi sistemos lygtys virstų teisingomis lygybėmis. Kadangi

$$\begin{cases} -1+4=3, \\ (-1)\cdot 4=-4, \end{cases}$$

tai lygties sprendiniai yra $x_1=-1$, $x_2=4$.

Pratimai ir uždaviniai

600. Raskite lygčių sprendinių sumą ir sandaugą:

a) $x^2-6x+8=0$ b) $x^2-5x+6=0$
c) $x^2-37x+27=0$ d) $y^2+41y-371=0$

601. Lygtis pakeiskite redukuotosiomis ir raskite sprendinių sumą ir sandaugą:

a) $2x^2-9x-10=0$ b) $5x^2+12x+7=0$
c) $8x^2+2x-3=0$ d) $3x^2-7x+2=0$

602. Taikydami Vijeto teoremą raskite lygčių sprendinius:

a) $x^2+5x-14=0$ b) $x^2-3x-12=0$
c) $x^2+3x-12=0$ d) $x^2-7x+12=0$
*e) $x^2+x+6=0$ *f) $-x^2+8x-25=0$

603. Išspręskite kvadratines lygtis ir pagal Vijeto teoremą pasitikrinkite, ar teisingai apskaičiavote:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$
b) $x^2 - 3x - 1 = 0$
*c) $3x^2 + 5x - 2 = 0$
*d) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
e) $x^2 + 2x - 2 = 0$
*f) $5x^2 - 11x + 2 = 0$

604. Persibraižykite lentelę ir ją užpildykite:

Kvadratinė lygtis	Redukuotoji kvadratinė lygtis	Diskriminantas	Sprendinių skaičius	Sprendiniai	
				x_1	x_2
$7x^2 - 14x + 7 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	0	1	1	1
$5x^2 - 5x + 10 = 0$					
$\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{6}x - \frac{4}{3} = 0$					
$-3x^2 - 9x + 12 = 0$					
$4x^2 + 3x - 9 = 0$					
$2x^2 + 5x + 7 = 0$					

605. Sudarykite redukuotąją kvadratinę lygtį, jei jos sprendiniai yra:

a) $x_1 = 1,\ x_2 = -3$ ir $a = 3$
b) $x_1 = 5,\ x_2 = -4$ ir $a = -5$
c) $x_1 = -1,\ x_2 = -5$ ir $a = 10$
d) $x_1 = -4,\ x_2 = -6$
e) $x_1 = 3 - \sqrt{2},\ x_2 = 3 + \sqrt{2}$
f) $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$
g) $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{3}$
h) $x_1 = -\sqrt{7},\ x_2 = \sqrt{7}$
i) $x_1 = 6,\ x_2 = -2$
j) $x_1 = -5,\ x_2 = -3$
k) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$ ir $a = 4$
l) $x_1 = 2\frac{1}{2},\ x_2 = 1\frac{1}{2}$

606. Nustatykite sprendinius spėliodami:

a) $y^2 - 6y - 7 = 0$
b) $x^2 + x - 12 = 0$
c) $v^2 - 5v - 6 = 0$
d) $y^2 - 11y + 10 = 0$
e) $z^2 - 7z + 12 = 0$
f) $x^2 - 5x - 6 = 0$

607. Nespręsdami lygties sudarykite naują kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų du kartus didesni už lygties $x^2 - 5x + 6 = 0$ sprendinius.

608. a) Lygties $x^2 + px - 35 = 0$ vienas sprendinys lygus 7. Raskite kitą sprendinį ir koeficientą p.

b) Lygties $x^2 - 13x + q = 0$ vienas sprendinys lygus 12,5. Raskite kitą sprendinį ir koeficientą q.

609. Kvadratinės lygties $x^2 - 12x + q = 0$ sprendinių skirtumas lygus 2. Raskite q.

610. Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai yra $\sqrt{2}$ ir $-\sqrt{8}$.

A $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$ **B** $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$
C $x^2 - \sqrt{2}x - 16 = 0$ **D** Lygties sudaryti negalima

611. Keturkampio plotas yra $600\,\text{cm}^2$, o ilgiausioji kraštinė lygi 25 cm. Panašaus į jį keturkampio ilgiausioji kraštinė yra 15 cm. Raskite antrojo keturkampio plotą.

612. Lygiagretainio gretimų kraštinių ilgiai yra 24 cm ir 16 cm. Apskaičiuokite panašaus į jį lygiagretainio perimetrą, jeigu šio lygiagretainio trumpesnioji kraštinė lygi 40 cm.

613. Keturi broliai turėjo 45 Lt. Jei Domo pinigų sumą padidinsime 2 Lt, Jono sumažinsime 2 Lt, Kosto padidinsime 2 kartus, Vyto sumažinsime 2 kartus, tai visi broliai pinigų turės po lygiai. Kiek pinigų turėjo kiekvienas brolis?

614. Ar ekvivalenčios lygčių sistemos:

a) $\begin{cases} \dfrac{5+y}{3} - \dfrac{3x+4y}{4} = 3x+1, \\ \dfrac{7x+2y}{3} + \dfrac{4x-3}{2} + 3x = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$ ir $\begin{cases} x+2y=2, \\ 3x-y=-1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3-y, \\ y = 3-x \end{cases}$ ir $\begin{cases} y = 3x, \\ 6x-2y=3? \end{cases}$

615. Užrašę trinarius pavidalu $a(x+m)^2+n$ nubraižykite grafikus funkcijų:

a) $y = x^2 + 2x - 8$;
b) $y = -x^2 + 6x - 5$.

616. Duota funkcija $y = x^2 + px + q$. Raskite p ir q reikšmes, jeigu žinoma, kad funkcijos grafikui priklauso taškai $M(-3; 0)$ ir $N(1; 8)$.

617. Visi vakarėlio dalyviai pasisveikino paspausdami vienas kitam ranką. Kažkas suskaičiavo, jog ranka vienas kitam buvo paspausta 66 kartus. Kiek dalyvių buvo vakarėlyje?

5 Kvadratinių trinarių skaidymas dauginamaisiais

Daugianariai, kurių kintamojo aukščiausias laipsnis lygus 2, pvz., $x^2 - x - 6$, $y^2 - 4y + 4$, $-t^2 + t - 2$, vadinami *kvadratiniais trinariais*. Kvadratinio trinario bendrasis pavidalas yra $ax^2 + bx + c$; čia x — kintamasis, a, b, c — skaičiai, nelygūs 0.

Kintamojo reikšmės, su kuriomis kvadratinis trinaris lygus nuliui, vadinamos kvadratinio trinario šaknimis.

Pavyzdžiui, skaičiai 3 ir -2 yra kvadratinio trinario $x^2 - x - 6$ šaknys, nes
kai $x = 3$, tai $x^2 - x - 6 = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$;
kai $x = -2$, tai $x^2 - x - 6 = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.

Norėdami rasti kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknis turime išspręsti kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$.



Raskite kvadratinio trinario $y^2 - 4y + 4$ šaknis.

Jei kvadratinis trinaris turi šaknų, tai jį galima išskaidyti pirmojo laipsnio dauginamaisiais.

Teorema. *Jei kvadratinio trinario* $ax^2 + bx + c$ *šaknys yra* x_1 *ir* x_2, *tai tą trinarį galima išskaidyti dauginamaisiais*: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Įrodymas. Kadangi x_1 ir x_2 yra kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknys, t. y. kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendiniai, tai pagal Vijeto teoremą:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remdamiesi šiomis lygybėmis pertvarkykime kvadratinį trinarį:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\big(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\big) = \\ &= a(\underline{x^2 - x_1x} - \underline{\underline{x_2x + x_1 \cdot x_2}}) = \\ &= a\big(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\big) = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Vadinasi, yra teisinga lygybė $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

UŽDAVINYS. Išskaidykite dauginamaisiais kvadratinį trinarį:
a) $3x^2 + 5x + 2$; b) $x^2 - 2x + 1$; c) $x^2 - x + 1$.

Sprendimas.
a) Raskime kvadratinio trinario $3x^2 + 5x + 2$ šaknis, t. y. tas x reikšmes, su kuriomis trinaris lygus nuliui:

$$3x^2 + 5x + 2 = 0,$$
$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1,$$
$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 - 1}{6} = -1, \quad x_2 = \frac{-5 + 1}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Pagal formulę $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ gauname:

$$3x^2 + 5x + 2 = 3\big(x - (-1)\big)\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = 3(x + 1)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

? Pasitikrinkite, ar tikrai $3x^2 + 5x + 2 = 3(x + 1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$.

b) Raskime kvadratinio trinario $x^2 - 2x + 1$ šaknis:

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = \frac{2}{2} = 1.$$

Vadinasi, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.
Žinoma, kvadratinį trinarį $x^2 - 2x + 1$ išskaidyti dauginamaisiais galėjome ir taikydami skirtumo kvadrato formulę $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2.$$

c) Raskime trinario $x^2 - x + 1$ šaknis:

$$x^2 - x + 1 = 0,$$
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$$

Kadangi $D < 0$, tai kvadratinė lygtis sprendinių neturi. Vadinasi, kvadratinio trinario $x^2 - x + 1$ išskaidyti pirmojo laipsnio dauginamaisiais negalima.

Pratimai ir uždaviniai

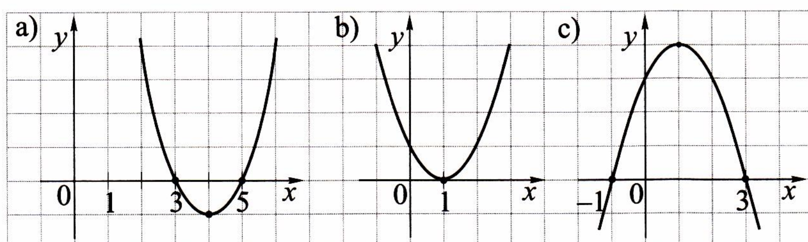
618. Raskite kvadratinių trinarių šaknis:

a) $x^2 + 3x - 10$ b) $x^2 - 2x - 3$ c) $2x^2 - 5x + 3$
d) $5y^2 + 2y - 3$ e) $x^2 - 2{,}2x + 0{,}4$ f) $x^2 + 2{,}5x - 3$

619. Išskaidykite, jeigu galima, kvadratinį trinarį dauginamaisiais:

a) $x^2 + 5x - 6$ b) $u^2 - 2u - 15$ c) $t^2 - 4t + 4$
d) $y^2 + 6y + 9$ e) $z^2 + z + 1$ f) $u^2 - 2u + 2$
g) $v^2 + 4v + 1$ h) $y^2 + 10y + 1$ i) $2x^2 - x - 2$
j) $3z^2 - 2z - 1$ k) $-5x^2 + 3x + 2$ l) $-4y^2 - y + 3$
*m) $-9z^2 - 3z - 2$ *n) $-25z^2 + 5z - 4$ *o) $7x^2 + 6x + 1$
*p) $9v^2 - 10v + 2$ *r) $-11u^2 + 20u + 3$ *s) $-13y^2 - 16y + 3$

620. Iš grafiko nustatykite kvadratinio trinario šaknis ir išskaidykite trinarį dauginamaisiais.



621*. Persibraižykite lentelę ir ją užpildykite.

Kvadratinio trinario šaknys x_1; x_2	Kvadratinės lygties užrašas	
	Dauginamųjų sandauga	Kvadratiniu trinariu
$x_1 = 2$; $x_2 = 3$	$(x-2)(x-3) = 0$	$x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_1 = 1$; $x_2 = 5$		
$x_1 = -3$; $x_2 = 2$		
$x_1 = -2$; $x_2 = 4$; $a = 3$		
$x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{5}$; $a = 5$		

622. Ar nurodyti skaičiai yra duotojo kvadratinio trinario šaknys?

a) -6; 3; $y^2 + 3y - 18$ b) -1; 7; $b^2 - 8b + 7$
c) 2; 3; $n^2 + 5n - 6$ d) $1 + \sqrt{7}$; $1 - \sqrt{7}$; $r^2 - 2r - 6$

623. Sudarykite kvadratinį trinarį, jei jo šaknys yra:

a) 2 ir 14 b) -2 ir $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{2}{5}$ ir 0
d) $1{,}4$ ir 0 e) $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ ir $-\frac{1}{2}\sqrt{7}$ f) $\sqrt{6}-2$ ir $\sqrt{6}+2$

624. Nebraižydami funkcijos grafiko raskite taškus, kuriuose jis kerta x ašį:

a) $y = x^2 - 5x + 6$ b) $y = x^2 - 7x + 13$
c) $y = -x^2 + 2x + 3$ d) $y = -x^2 + 2x + 8$

625. Išspręskite lygtis:

a) $r^2 + 14r - 10 = 5$ b) $y^2 + 7y + 10 = -2$ c) $z^2 - 4z = 2$
d) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ e) $2y^2 - 5y = -1$ f) $x^2 - 10x = 23$

626. Kiek sprendinių turi šios kvadratinės lygtys:

a) $9k^2 - 13k + 4 = 0$ b) $7x^2 - 6x + 5 = 0$ c) $9a^2 + 25 = 30a$
d) $4p^2 + 4p = 15$ e) $3s^2 - 7s = 2$ f) $9k^2 - 1 = 12k$?

627. Raskite lygties sprendinius:

a) $-3x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ c) $x^2 - 1 = 0$
d) $-x^2 + 7 = 0$ e) $2x^2 + 3 = 0$ f) $8x^2 + 12x = 0$

628. Nespręsdami lygties raskite jos sprendinių sumą ir sandaugą:

a) $x^2 - 5x - 14 = 0$ b) $20x^2 - 7x - 6 = 0$
c) $13x^2 - 10 = 0$ d) $5x^2 - 3x = 0$

629. a) Lygties $x^2 - mx - 12 = 0$ vienas sprendinys lygus 4. Raskite koeficientą m ir kitą lygties sprendinį.
b) Vienas lygties $(a-7)x^2 + 13x - a = 0$ sprendinys lygus 5. Raskite a ir kitą lygties sprendinį.

630. Kvadratinės lygties $x^2 + 3x + p = 0$ sprendinių kvadratų skirtumas lygus 21. Raskite skaičių p.

631. Lygties $x^2 + 5x + q = 0$ sprendinių dalmuo lygus $-3{,}5$. Raskite q.

632. Kampo M kraštines kerta dvi lygiagrečios tiesės BC ir DE (taškai B ir D yra vienoje kampo kraštinėje), $MB + MD = 21$ cm, $MC = 12$ cm ir $ME = 16$ cm. Raskite MB.

633. BD yra trikampio ABC kampo B pusiaukampinė.
Žinoma, kad $AB = 10\,\text{cm}$, $BC = 15\,\text{cm}$ ir $AC = 20\,\text{cm}$.
Raskite:

a) $AD : DC$; b) $CD : DA$; c) AD ir DC.

634. Trikampio viena kraštinė lygi 48 cm, o į ją nubrėžta aukštinė — 16 cm. Į trikampį įbrėžtas stačiakampis, kurio kraštinių santykis yra 5 : 9 ir ilgesnioji kraštinė yra minėtoje trikampio kraštinėje. Raskite stačiakampio kraštines.

635. Nubraižykite statųjį trikampį, kurio:
a) statinis lygus 4 cm, o įžambinė — 5 cm;
b) vienas statinis lygus 3 cm, o smailusis kampas prieš jį yra 30°.
Surašykite trikampio braižymo žingsnius.

636. Kuriuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose nėra taškų tiesės:
a) $y = 1 - x$; b) $y = 2$; c) $2x + y = 3$?

637. Apskaičiuokite:

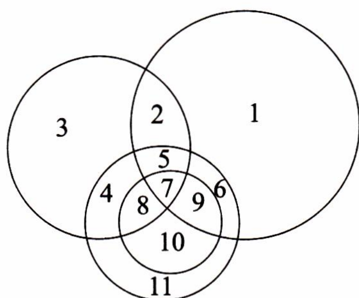
a) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 5^0} - \sqrt[3]{8^2} \cdot 4^{-1}$ b) $\sqrt{9} \cdot 6^0 - \sqrt{8 \cdot 2^{-1}}$

c) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{32}-\sqrt{8}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}}$

638. Donatas turi 24 spalvotus pieštukus. Žinoma, kad kiekvienos spalvos pieštukų jis turi po lygiai. Kiek skirtingų spalvų pieštukų turi Donatas? (Išnagrinėkite visus galimus atvejus.)

639. Kuris iš skaičių yra visuose keturiuose skrituliuose?

A 10 **B** 9 **C** 8 **D** 7 **E** 6



6 Bikvadratinės lygtys

Išmokę spręsti antrojo laipsnio (kvadratines) lygtis nesunkiai galime išspręsti ir kai kurias aukštesnio laipsnio lygtis.
Pavyzdžiui, išspręskime lygtis:
a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; b) $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$; c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$.
Šiose lygtyse nežinomieji yra tik antrojo ir ketvirtojo laipsnio. Įsivedę naują nežinomąjį, t. y. pažymėję $x^2 = y$, gauname antrojo laipsnio (kvadratinę) lygtį, nes $x^4 = (x^2)^2 = y^2$.
a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
Pažymėkime $x^2 = y$. Tada $x^4 = y^2$. Gauname kvadratinę lygtį:

$$y^2 - 10y + 9 = 0,$$
$$D = 100 - 36 = 64,$$
$$y_1 = \frac{10 - 8}{2} = 1, \quad y_2 = \frac{10 + 8}{2} = 9.$$

Gautas y reikšmes įrašome į lygybę $x^2 = y$ ir išsprendžiame gautas kvadratines lygtis:

$x^2 = 1$, $\qquad$ $x^2 = 9$,
$x_1 = -1, x_2 = 1$; $\qquad$ $x_3 = -3, x_4 = 3$.

Atsakymas. -3; -1; 1; 3.

b) $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$.
Pažymime $x^2 = y$:

$$y^2 + 4y - 21 = 0,$$
$$D = 16 + 84 = 100,$$
$$y_1 = \frac{-4 - 10}{2} = -7, \quad y_2 = \frac{-4 + 10}{2} = 3.$$

Į išraišką $x^2 = y$ įstatome gautas y reikšmes:

$x^2 = -7$, $\qquad$ $x^2 = 3$,
ši lygtis sprendinių neturi; $\qquad$ $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$.

Atsakymas. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$.
Pažymėkime $x^2 = y$:

$$y^2 + 10y + 9 = 0,$$
$$D = 100 - 36 = 64,$$
$$y_1 = \frac{-10-8}{2} = -9, \quad y_2 = \frac{-10+8}{2} = -1.$$

$x^2 = -9$ ir $x^2 = -1$.
Abi lygtys sprendinių neturi.
Atsakymas. Sprendinių nėra.

Lygtis $ax^4 + bx^2 + c = 0$ vadinama *bikvadratine lygtimi*.
Spręsdami bikvadratines lygtis pažymime $x^2 = y$ ir sprendžiame gautą kvadratinę lygtį: $ay^2 + by + c = 0$.
Suradę y reikšmes randame jas atitinkančias x reikšmes.

Pratimai ir uždaviniai

640. Išspręskite lygtis:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
c) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
d) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

641. Sudarykite bikvadratinę lygtį, kai žinomi lygties sprendiniai:
a) $x_1 = 2, x_2 = 1$; b) $x_1 = -3, x_2 = 3$.

642. Raskite bikvadratinio trinario šaknis:

a) $x^4 - 29x^2 + 100$
b) $x^4 - 17x^2 + 16$
c) $x^4 - 50x^2 + 49$
d) $x^4 - 25x^2 + 144$

643. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $x^4 - 5x^2 + 4$
b) $x^4 - 13x^2 + 36$
c) $x^4 - 125x^2 + 484$
d) $4x^4 - 5x^2 + 1$

644*. Įrodykite, kad bikvadratinės lygties $x^4 + px^2 + q = 0$ visų sprendinių suma yra lygi nuliui, o sandauga lygi q.

645. Išspręskite lygtis:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
b) $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$;
c) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;
d) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$;

646. Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų skaičiai $\frac{1}{2}$ ir $-\frac{1}{4}$.

647. Nespręsdami lygties $x^2 - 7x + 10 = 0$ raskite:

a) sprendinių kvadratų sumą;
b) skaičių, atvirkštinių sprendiniams, sumą.

648. Lygties $x^2 + px - 35 = 0$ vienas sprendinys lygus 7. Raskite kitą sprendinį ir koeficientą p.

649. Kokie jums žinomi fizikos dėsniai užrašomi panaudojant kvadratines funkcijas?

650. Ar gali būti lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendiniais skaičiai p ir q?

651. Kvadratinė lygtis $3x^2 + bx + c = 0$ turi vienintelį sprendinį, lygų 1. Kam lygūs b ir c?

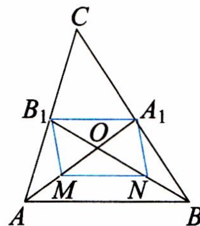
652. Vienas kvadratinės lygties $5x^2 + 3x + c = 0$ sprendinys lygus -1, o kitas sutampa su lygties $5x + 4 = -p$ sprendiniu. Raskite p.

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 5

652. Dviejų panašiųjų stačiakampių perimetrai lygūs 16 dm ir 48 dm. Didesniojo stačiakampio viena kraštinė yra 9 dm. Apskaičiuokite mažesniojo stačiakampio plotą.

653. Dviejų panašiųjų lygiagretainių plotai lygūs 32 cm^2 ir 128 cm^2. Mažesniojo lygiagretainio kraštinės yra 4 cm ir 16 cm. Apskaičiuokite didesniojo lygiagretainio perimetrą.

654. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 susikerta taške O. Nubrėžta trikampio AOB vidurinė linija MN. Įrodykite, kad keturkampis MNA_1B_1 yra lygiagretainis.



655. Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinis yra įžambinės ir jo statinio projekcijos įžambinėje geometrinis vidurkis.

Pasitikrinkite

1. Išspręskite nepilnąsias kvadratines lygtis:

a) $2x^2 = 0$ b) $x^2 - 16 = 0$
c) $2x - x^2 = 0$ d) $5x^2 - 10x = 0$
e) $7x - 2x^2 = 0$ f) $3x^2 - 75 = 0$
g) $x^2 = 2$ h) $4x^2 = 8x$

2. Vaikai žaisdami spėliojo skaičius. Inga sako: „Sugalvojau skaičių, iš jo kvadrato atėmiau 25 ir gavau nulį“. Kokį skaičių galėjo sugalvoti Inga?

3. Išspręskite lygtis, išskirdami dvinario kvadratą:

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ b) $x^2 - 22x + 85 = 0$
c) $x^2 - 8x + 15 = 0$ d) $x^2 + 2x + 3 = 0$
e) $x^2 - 12x = -35$ f) $x^2 - 2x = 3$

4. Išspręskite lygtis pasinaudoję kvadratinės lygties sprendinių formule:

a) $x^2 + x + 5 = 0$ b) $x^2 + 8x + 7 = 0$
c) $3x^2 - 2x - 5 = 0$ d) $x^2 - 4x - 21 = 0$
e) $x^2 - 0{,}6x + 2 = 0$ f) $x^2 - 10x + 25 = 0$
g) $x^2 + 7x = -12$ h) $4x^2 - 8x = -10$

5. Išspręskite kvadratines lygtis trimis būdais (grafiškai, išskiriant dvinario kvadratą ir pagal sprendinių formulę):

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$ b) $x^2 + 10x + 21 = 0$
c) $x^2 + 4x - 21 = 0$ d) $x^2 + 4x - 45 = 0$
e) $x^2 - 2x - 15 = 0$ f) $x^2 - 8x + 12 = 0$

6. Ignas sugalvojo skaičių, jį padaugino iš 8 ir gautą rezultatą atėmė iš sugalvoto skaičiaus kvadrato. Pamąstęs dar pridėjo 16 ir gavo nulį. Kokį skaičių sugalvojo Ignas?

7. Išskaidykite kvadratinius trinarius dauginamaisiais:

a) $x^2 - 4x + 3$; b) $x^2 - 10x + 9$; c) $x^2 - 2x - 35$; d) $x^2 - 4x - 60$.

8. Stačiakampio formos tvenkinį, kurio vienas kraštas 10 m ilgesnis už kitą, reikia aptverti tvora. Tvenkinio plotas lygus $1200\,\mathrm{m}^2$. Raskite tvoros ilgį.

9. Kvadrato įstrižainė lygi 6 cm. Raskite kvadrato plotą.

A $12\,\mathrm{cm}^2$ **B** $36\,\mathrm{cm}^2$ **C** $18\,\mathrm{cm}^2$ **D** $24\,\mathrm{cm}^2$

10. Kvadrato formos sklypo kraštą pailginus 2 m jo plotas padidėtų 44 m^2. Koks sklypo krašto ilgis?

11. Duota trapecija $ABCD$, $BC \parallel AD$; O — įstrižainių susikirtimo taškas. Žinoma, kad $AO = 8\,\text{cm}$, $OC = 10\,\text{cm}$ ir $BD = 27\,\text{cm}$. Raskite OB ir OD.

12. Trikampio kraštinės yra 8 cm, 10 cm ir 12 cm. Raskite kraštines trikampio, kurio viršūnės yra duotojo trikampio kraštinių vidurio taškai.

13. Stačiakampio kraštinės yra lygios 12 cm ir 9 cm. Apskaičiuokite panašaus į jį stačiakampio plotą, jeigu šio stačiakampio ilgesnioji kraštinė lygi 8 cm.

14. Trikampio viena kraštinė yra a, o aukštinė, nubrėžta į tą kraštinę, lygi h. Į trikampį įbrėžtas kvadratas, kurio dvi viršūnės yra kraštinėje a, o kitos dvi — šoninėse kraštinėse. Raskite kvadrato kraštinę.

15. Stačiojo trikampio statinių projekcijos įžambinėje yra lygios 5 cm ir 4 cm. Raskite trumpesnįjį statinį.

16. 3 kg bulvių ir 2 kg svogūnų kainuoja 4,8 Lt, o 4 kg bulvių ir 3 kg svogūnų — 6,8 Lt. Kiek kainuoja 1 kg bulvių ir kiek 1 kg svogūnų?

17. Dviejų skaičių suma lygi -3, o šių skaičių skirtumas yra 27. Raskite tuos skaičius.

18. Parašykite kuo paprastesnę lygčių sistemą, kuri būtų ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} (2x-3)(y-2)+2x(3-y)=24, \\ y-x=-6. \end{cases}$$

19. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{125 \cdot 5^{-1}} + \sqrt[3]{27} : 4^0$ b) $\sqrt{2 : \frac{1}{2}} - \sqrt{0{,}5 : 2^{-1}}$

c) $\frac{\sqrt{175}}{\sqrt{63}-\sqrt{28}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

20. Ar taškas $K(-2; 5)$ priklauso grafikui funkcijos:

a) $y = -2x + 1$; b) $y = x^2 + x + 3$; c) $y = \frac{10}{x}$; d) $y = 5$.

21. Tiesėje — lygties $8x - 5y = 20$ grafike — pažymėtas taškas.

a) Taško abscisė lygi 3. Raskite jo ordinatę.
b) Taško ordinatė lygi -10. Raskite jo abscisę.

Skyrelių „Pasitikrinkite“ uždavinių atsakymai

1

1. a) 5; b) 3,5; c) 8,5; d) 7.

2. a) $M(5)$; b) $M(2)$; c) $M(3{,}5)$.

3. a) $(0; \approx 2{,}1)$; b) $(\approx 2; 0)$.

4. $C(5; -1)$, $D(5; 7)$ arba $C(-11; -1)$, $D(-11; 7)$.

5. a) 5; b) 13; c) 5; d) $2\sqrt{10}$.

6. a) 4; b) 8; c) 5; d) 5.

7. *Nurodymas*. Įsitikinkite, kad $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

8. c).

9. a) $D(f) = [-5; 5]$; b) $E(f) = [-2; 4]$;
   c) funkcija didėja intervale $(-3; -1)$ ir intervale $(3; 5]$; mažėja intervale $[-5; -3)$ ir intervale $(-1; 3)$;
   d) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 4, mažiausia — -2;
   e) $f(x) > 0$, kai $x \in [-5; 2) \cup (4; 5]$; $f(x) < 0$, kai $x \in (2; 4)$.

10. a) $f(x) = -x$; b) $f(x) = 3x$; c) $f(x) = \frac{1}{2}x$; d) $f(x) = -\frac{1}{3}x$.

11.

x	0	3	5	-2	7	3	2	1
$f(x)$	-3	0	2	-5	4	0	-1	-2

a) Ox ašį kerta taške $(3; 0)$, Oy ašį — taške $(0; -3)$; b) $x = 3$; c) $x > 3$; d) $x < 3$.

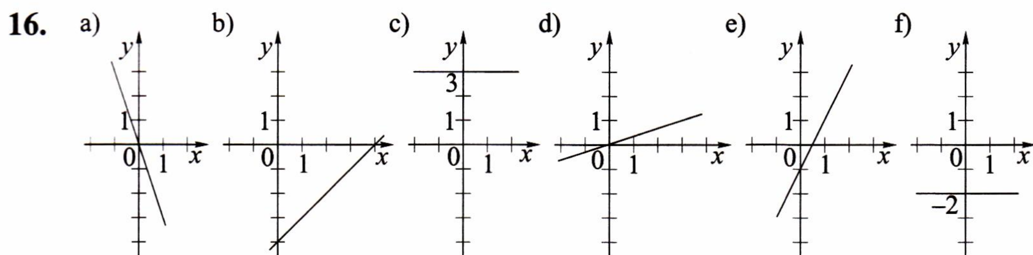
12. $f(0{,}2) = 0$; $f(18) = 89$; taškas A funkcijos grafikui nepriklauso.

13. A.

14. a) $y = 2x - 1$; b) $y = 3x$; c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; d) $y = -2x + 2$.

15. $C(0; -3)$.

16.



17. a) **B**; b) **C**; c) **A**; d) **A**; e) **B**; f) **C**.

18. a) $k = 2$; $b \neq 3$; b) $k = -5$; $b \neq 19$; c) $k = 2{,}1$; $b \neq -2{,}5$; d) $k = -\frac{3}{7}$; $b \neq -1$.

20. a) $(\approx -1{,}3; \approx -6{,}3)$, $(\approx 1{,}3; \approx 6{,}3)$ b) $(-4; 1)$ ir $(4; -1)$.

21. a) 3; 5; 7; 9; 11; b) −1,5; 1; 3,5; 6; 8,5; c) 4; 2,5; 1; −0,5; −2.

22. a) Justė nutolo apie 90 km, o Tomas — apie 160 km;
b) autobusas nuvažiavo apie 90 km, o automobilis — apie 160 km;
c) autobusas važiavo apie 1,5 h, o automobilis — apie 2 h;
d) autobuso greitis buvo apie 60 km/h, o automobilio — apie 80 km/h;
e) abu stovėjo apie 0,5 h (arba 30 min.);
f) autobusas po sustojimo važiavo maždaug 65 km/h greičiu, o automobilis — maždaug 120 km/h greičiu.

23. $T = 6 + 2t$; a) taip; b) $T(20) = 46\,°C$; $T(31) = 68\,°C$; c) po 47 min.

24. a) 48 cm; b) 8 : 5 : 5; c) 18 cm; d) 432 cm^2; e) 28,8 cm.

25. $P = (12 + 16\pi)$ cm; $S = 48\pi$ cm^2.

26. a) 96 cm^2; b) 64 cm^3; c) $4\sqrt{2}$ cm; d) $4\sqrt{3}$ cm.

27. a) 0; b) 126.

28. a) a^2; $\frac{4}{9}$; b) $y^2 + 2xy$; 0.

29. a) $x > 4$; b) $x \leqslant 2$; c) $x \leqslant -1{,}5$; d) $x < 0$.

30. a) 112,1 Lt; b) 141,6 Lt.

2

1. a), c), d) ir f),

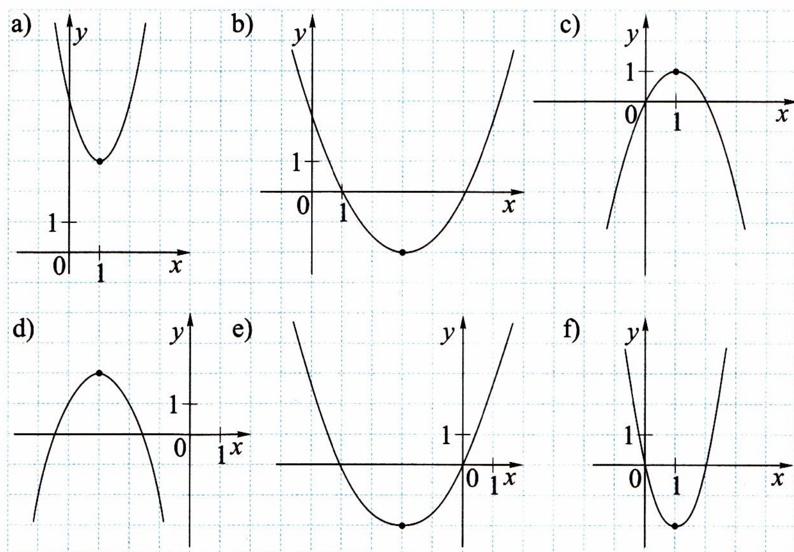
2. a) $a = 3$; $b = -4$; $c = 7$; b) $a = -2$; $b = 0$; $c = 3$; c) $a = \frac{1}{4}$; $b = -2$; $c = -1$; d) $a = 2{,}5$; $b = -3{,}5$; $c = 3$; e) $a = -1$; $b = 3$; $c = 0$; f) $a = -1$; $b = 3$; $c = 7$.

3. a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$; c) $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}$.

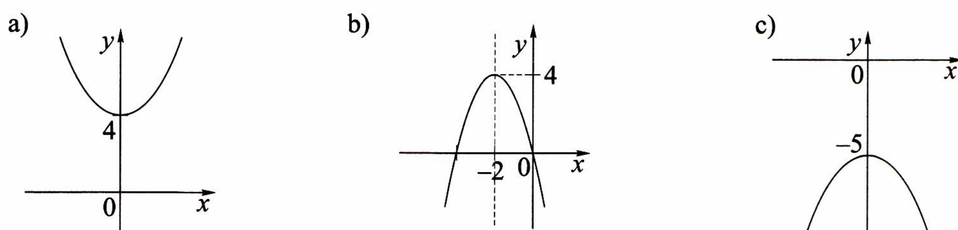
4. a) -1; b) -13; c) $2\frac{15}{16}$; d) $-a^2+4a-1$; e) $-x^2+6x-6$; f) $-c^2+2c+2$.

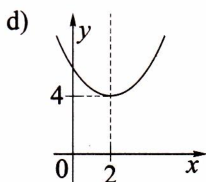
5. B, C, D — priklauso; A — nepriklauso.

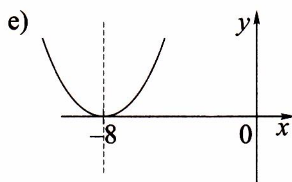
8.

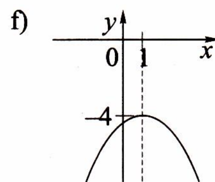


9. Simetrijos ašis — tiesė: a) $x = 0$; b) $x = -2$; c) $x = 0$; d) $x = 2$; e) $x = -8$; f) $x = 1$; viršūnės koordinatės: a) $(0; 4)$; b) $(-2; 4)$; c) $(0; -5)$; d) $(2; 4)$; e) $(-8; 0)$; f) $(1; -4)$;
schemiškas funkcijos grafikas:



d) 

e) 

f) 

10. a) Mažiausia funkcijos reikšmė lygi 2; b) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 5; c) mažiausia funkcijos reikšmė lygi -4; d) mažiausia funkcijos reikšmė lygi -10; e) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 2,5; f) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 0.

11. a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; c) $f(x) = -3x^2$.

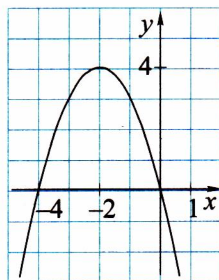
12. a) $f(x) = -x^2 + 3$; b) $f(x) = x^2 - 4$; c) $f(x) = x^2 + 2$.

13. a) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4$; b) $f(x) = (x-2)^2 - 2$;
c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$.

14. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$; b) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3{,}5$; c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

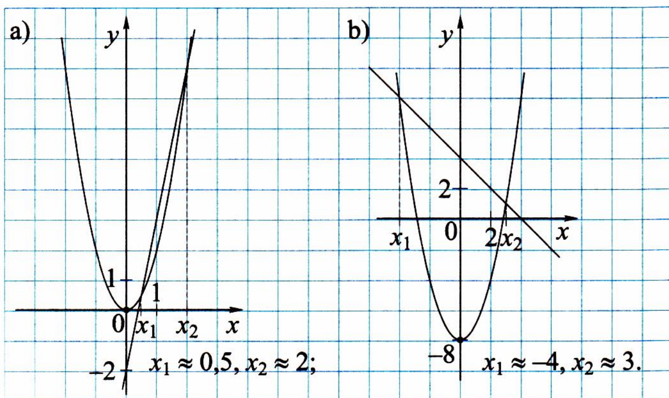
15. Funkcija įgyja teigiamas reikšmes intervaluose $(-\infty; 2)$ ir $(4; +\infty)$, o neigiamas — intervale $(2; 4)$.

16. a) Parabolės viršūnės koordinatės yra $(-2; 4)$; simetrijos ašis — tiesė $x = -2$;
b) $(-4; 0)$; $(0; 0)$;
c) funkcija didėja intervale $(-\infty; -2)$, o mažėja intervale $(-2; +\infty)$;
d) didžiausia funkcijos reikšmė lygi 4; funkcijos reikšmių sritis $(-\infty; 4]$.

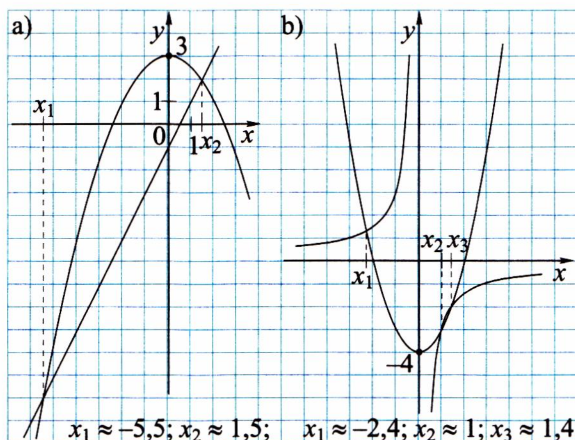


17. **A** a) $[-2; 2]$; b) mažiausia funkcijos reikšmė lygi 0, didžiausia — 4;
B a) $[-1; 2]$; b) mažiausia funkcijos reikšmė lygi 0, didžiausia — 4;
C a) $[1; 2]$; b) mažiausia funkcijos reikšmė lygi 1, didžiausia — 4.

18.

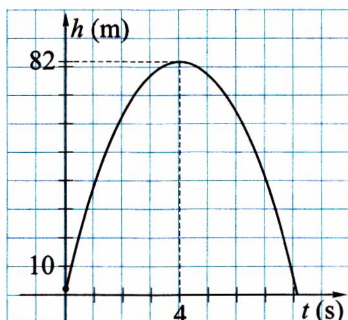


19.



20. a) Šakos nukreiptos aukštyn; (0; −17);
b) šakos nukreiptos žemyn; (0; 12);
c) šakos nukreiptos žemyn; (0; −4,5);
d) šakos nukreiptos aukštyn; (0; 3).

21. a) $h = -5(t-4)^2 + 82 = -5(t^2 - 8t + 16) + 82 = -5t^2 + 40t + 2.$
b)



c) maždaug per 8,1 s; d) 82 m.

22. Per 4 s — ne, per 5 s — taip.
23. a) 5 cm; b) 40 cm; c) 90 cm^2; d) 13 cm ir $2\sqrt{61}$ cm.

24. a) $P = (36 + 4{,}5\pi)$ cm, $S = (162 - 20{,}25\pi)$ cm^2;
b) $P = 48 + 4\pi$ (ilgio vienetų), $S = 128 + 16\pi$ (ploto vienetų).

25. a) 20; b) −12; c) 64; d) $\frac{1}{4}$.

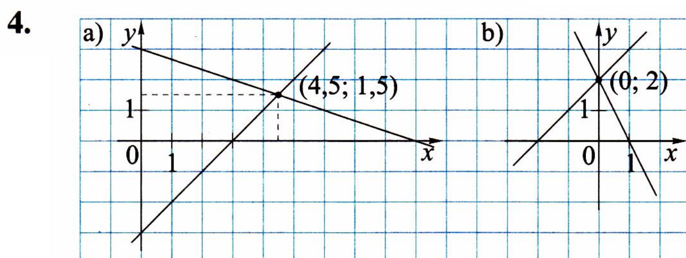
26. a) 2,2; b) −2.

27. a) $-3\frac{1}{3}$; b) $-4\frac{1}{9}$; c) $-5\frac{5}{6}$; d) −0,5.

28. a) 6 val.; b) 16 val.

29. Vienas saldainis kainuoja 30 ct, o vienas kivis — 70 ct.

3

1. a) Taip; b) ne; c) ne.
2. a) $y = 5 - 4x$; b) $y = 3x - 4{,}5$.
3. (2; 2).
4. 

5. a) $(1; -2)$; b) $(-1; 4)$.
6. a) $(2; 1)$; b) $(3; -2)$.
7. a) $(0; 4)$; b) $(1; 2)$.
8. Tušinukas kainavo 2 Lt, o pieštukas — 30 ct.
9. Upės tėkmės greitis yra 4 km/h, o savasis valties greitis — 14 km/h.
10. 50 monetų.
11. Aurimui yra 31 metai, o Eglei — 19 metų.
12. a) $(-2; 1)$, $(2; 1)$; b) $(-3; -4)$, $(3; -4)$.
13. a) $B(11; 3)$, $D(1; 3)$ arba $B(1; 3)$, $D(11; 3)$; b) $5\sqrt{2}$ ilgio vienetų; c) 50 ploto vienetų; d) $20\sqrt{2}$ ilgio vienetų.
14. $P = 50 + 5\pi$ (ilgio vienetų), $S = 120 + 12{,}5\pi$ (ploto vienetų).
15. a) $1\frac{1}{3}$; b) 0,84.
16. a) $x^2 - 2$; b) $9 - c^2$; c) $2ab + 27b^3$.
17. a) 0,4; 0,4; b) 0,2; 0,02.
18. a) $(5 - 3x)(5 + 3x)$; b) $a(4a - 1)(4a + 1)$; c) $(x + 1)(2y - 1)$; d) $(3 - a)(b - 1)$.
19. a) 12%; b) 18%.
20. a) 140; b) 138; c) 241; d) 241.
21. a) 250 m/min; b) 400 m/min; c) 500 m/min; d) 700 m/min.

4

1. a) 7,5 cm; b) 6 cm ir 8 cm. **2.** a) 7 cm ir 14 cm; b) $\frac{3}{4}$.

4. 5 dm. **5.** a) $x = 1{,}2$; $y = 6$; b) $x = 3$; $y = \frac{8}{3}$; c) $x = 2$; $y = 7{,}5$.

6.

	AD	DB	AB	AE	EC	AC	DE	BC
a)	7	8	15	7	8	15	10,5	22,5
b)	6	9	15	8	12	20	10	25
c)	4	5	9	6	7,5	13,5	8	18
d)	9	12	21	12	16	28	18	42

7. 12 cm.

8. a) *Nurodymas*. Įsitikinkite, kad keturkampio $MNKL$ dvi priešingos kraštinės lygiagrečios keturkampio $ABCD$ įstrižainei AC, o kitos dvi — įstrižainei BD; b) 80 cm.

9. a) 13 cm; b) 11 cm ir 5 cm; c) 12 cm ir 6 cm; d) 2,95 dm.

10. a) $BD = 4$ cm, $DC = 10$ cm; b) $S_{ABD} = 30\text{ cm}^2$, $S_{ADC} = 45\text{ cm}^2$.

11. a) Taip; b) ne; c) ne; d) taip; e) taip.

12. a) $AC = \frac{20}{3}$, $KL = 12$; b) $AC = 10{,}5$, $CD = 4$.

13. 4,5 m. **14.** a) Taip; b) ne; c) taip. **15.** 34 m.

16. a) *Nurodymas*. Įsitikinkite, kad $AD \parallel BC$; b) $AO = 5$ cm, $OC = 2$ cm, $BO = 4$ cm, $OD = 10$ cm.

17. a) $\frac{40}{13}$; b) $\frac{25}{4}$.

18. *Nurodymas*. Taikykite Talio teoremą trikampiams:
a) ABC ir DBA; b) ABC ir ADC.

19. a) 150 cm ir 90 cm; b) 250 cm ir 100 cm.

20. a) 600 cm^2 ir 864 cm^2; b) 22,8 cm. **21.** a) 5 Lt; b) 2,75 Lt.

22. a) 15 km/h; b) 90 km/h; 60 km/h; c) maždaug 8 h 50 min; 12 km; d) maždaug 10 h 40 min; e) 15 km.

23. $18 + 8\sqrt{2}$. **24.** a) $(-2; -3)$, $(1; 0)$; b) $(-1; 0)$, $(2; -3)$.

25. a) $y = 1\frac{1}{3}x$; b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. **26.** $(-1; 2)$.

27. $4x^2$; a) 16; b) 1; c) 8; d) $12 + 8\sqrt{2}$. **28.** a) $x < -2$; b) $x \geqslant 1$.

29. 542; 54.

5

1. a) 0; b) -4; 4; c) 0; 2; d) 0; 2; e) 0; 3,5; f) -5; 5; g) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; h) 0; 2.

2. -5 arba 5.

3. a) -4; b) 5; 17; c) 3; 5; d) sprendinių nėra; e) 5; 7; f) -1; 3.

4. a) Sprendinių nėra; b) -7; -1; c) -1; $1\frac{2}{3}$; d) -3; 7; e) sprendinių nėra; f) 5; g) -4; -3; h) sprendinių nėra.

5. a) 3; 7; b) -7; -3; c) -7; 3; d) -9; 5; e) -3; 5; f) 2; 6.

6. 4.

7. a) $(x-1)(x-3)$; b) $(x-1)(x-9)$; c) $(x+5)(x-7)$; d) $(x+6)(x-10)$.

8. 140 m.

9. C.

10. 10 m.

11. $OB = 15$ cm, $OD = 12$ cm.

12. 4 cm, 5 cm, 6 cm.

13. 48 cm^2.

14. $\frac{ah}{a+h}$.

15. 6 cm.

16. 1 kg bulvių kainuoja 0,8 Lt, o 1 kg svogūnų kainuoja 1,2 Lt.

17. 12 ir -15.

19. a) 8; b) 1; c) 5; d) 5.

20. a) Taip; b) taip; c) ne; d) taip.

21. a) 0,8; b) $-3,75$.

ISBN 9986-546-83-4 (1 dalis)
ISBN 9986-546-84-2 (2 dalys)